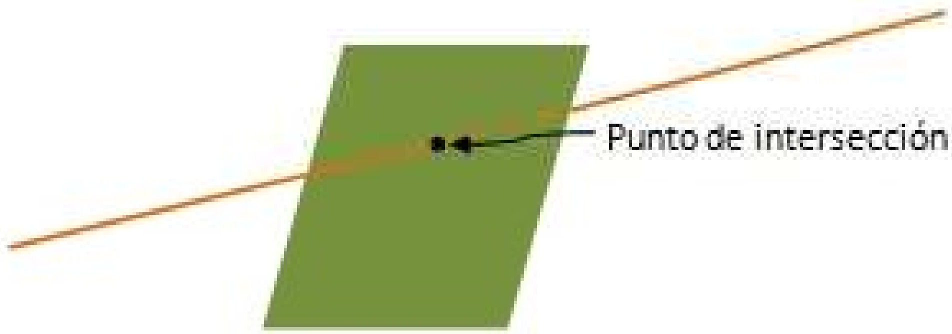
Clase intersección entre planos y rectas

Para encontrar el punto donde se intersectan un plano y una recta, se realiza el procedimiento siguiente:



Hallar el punto donde se interceptan el plano -5x + 2y + 7z -9 = 0 y la recta $\frac{(x-4)}{6} = \frac{(y-1)}{-3} = \frac{(z+8)}{4}$

La intersección entre plano y recta es un punto en común para las dos ecuaciones, es decir un único punto donde "x", "y" y "z" valen lo mismo para las dos ecuaciones

Mtra. Ma. De los Ángeles Martínez Cosío
Junio 20

…clase intersec. entre planos y rectas

Hallar el punto donde se interceptan el plano -5x + 2y + 7z -9 = 0 y la recta $\frac{(x-4)}{6} = \frac{(y-1)}{-3} = \frac{(z+8)}{4}$

La intersección entre plano y recta es un punto en común para las dos ecuaciones, es decir un único punto donde "x", "y" y "z" valen lo mismo para las dos ecuaciones

1) Primero debemos pasar las ecuaciones simétricas de la recta a la forma paramétricas:

$$x = 6t + 4$$

$$y = -3t + 1$$

$$z = 4t - 8$$

2) Ahora vamos a substituir "x", "y" y "z" en la ecuación del plano, y encontraremos el valor de "t":

$$-5x + 2y + 7z - 9 = 0$$

$$-5(6t + 4) + 2(-3t + 1) + 7(4t - 8) - 9 = 0$$

$$-30t - 20 - 6t + 2 + 28t - 56 - 9 = 0$$

$$-8t - 83 = 0$$

$$t = \frac{83}{-8}$$

$$t = -10.375$$

Mtra. Ma. De los Ángeles Martínez Cosío

…clase intersección entre planos y rectas

3) Con este valor de "t" substituimos en las ecuaciones paramétricas de la recta:

$x = 6t + 4$ $x = 6(-10.375) + 4$ $x = -62.25 + 4$ $x = -58.25$	$y = -3t + 1$ $y = -3(-10.375) + 1$ $y = 31.125 + 1$ $y = 32.125$	$z = 4t - 8$ $z = 4(-10.375) - 8$ $z = -41.5 - 8$ $z = -49.5$

Y de esta forma encontramos en punto en común para ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = -58.25 \\ y = 32.125 \\ z = -49.5 \end{array}\right\} \checkmark$$

Nota: Cuando las ecuaciones de la recta están en forma paramétricas se utilizan directamente, y si están en forma vectoriales, se deben cambiar a la forma paramétricas.

…clase intersección entre planos y rectas

Otro ejemplo, cuando las ecuaciones de la recta se presentan como ecuaciones simétricas separadas por parejas de ecuaciones:

Hallar el punto donde se cortan el plano $2x + 4y + 5z + 12 = 0$ y la recta:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 6 = -7y + 56 \\ -2x - 4 = -7z + 35 \\ -2y + 16 = 3z - 15 \end{array}\right\}$$

Ecuaciones simétricas trabajadas en parejas

1) Se deben trabajar y acomodar los quebrados para identificar las ecuaciones simétricas de la recta:

$3x + 6 = -7y + 56$ $3(x + 2) = -7(y - 8)$ $\frac{(x + 2)}{-7} = \frac{(y - 8)}{3}$	$-2x - 4 = -7z + 35$ $-2(x + 2) = -7(z - 5)$ $\frac{(x + 2)}{-7} = \frac{(z - 5)}{-2}$	$-2y + 16 = 3z - 15$ $-2(y - 8) = 3(z - 5)$ $\frac{(y - 8)}{3} = \frac{(z - 5)}{-2}$

$$\frac{(x + 2)}{-7} = \frac{(y - 8)}{3} = \frac{(z - 5)}{-2}$$

…clase intersección entre planos y rectas

Ahora se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = -7t - 2$$

$$y = 3t + 8$$

$$z = -2t + 5$$

2) Después vamos a substituir "x", "y" y "z" en la ecuación del plano, y encontraremos el valor de "t":

$$2x + 4y + 5z + 12 = 0$$

$$2(-7t - 2) + 4(3t + 8) + 5(-2t + 5) + 12 = 0$$

$$-14t - 4 + 12t + 32 - 10t + 25 + 12 = 0$$

$$-12t + 65 = 0$$

$$t = \frac{-65}{-12}$$

$$t = 5.4167$$

…clase intersección entre planos y rectas

3) Con este valor de "t" substituimos en las ecuaciones paramétricas de la recta:

$x = -7t - 2$ $x = -7(5.4167) - 2$ $x = -37.9169 - 2$ $x = -39.9169$	$y = 3t + 8$ $y = 3(5.4167) + 8$ $y = 16.2501 + 8$ $y = 24.2501$	$z = -2t + 5$ $z = -2(5.4167) + 5$ $z = -10.8334 + 5$ $z = -5.8334$

Y de esta forma encontramos en punto en común para ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x &= -39.9169 \\ y &= 24.2501 \\ z &= -5.8334 \end{aligned}\right\} \checkmark$$