Clase distancia perpendicular entre planos paralelos

Nota.- Los planos paralelos se caracterizan porque los coeficientes sus variables x, y, z son proporcionales, pero no lo son sus términos independientes.

Ejemplo de planos paralelos:

a) $3x + 2y - 7z + 16 = 0$ $\qquad -3x - 2y + 7z - 11 = 0$

b) $2x + y + 7z + 4 = 0$ $\qquad 4x + 2y + 14z + 5 = 0$

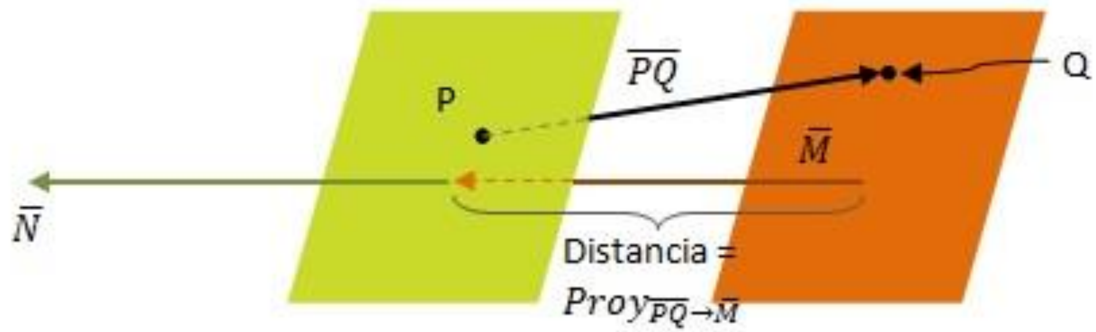
c) $3x + 6y + 4z + 9 = 0$ $\qquad -9x - 18y - 12z + 21 = 0$

d) $8x + 5y + 10z + 14 = 0$ $\qquad 8x + 5y + 10z - 2 = 0$

La distancia perpendicular o la distancia más corta entre dos planos paralelos se calcula con el procedimiento siguiente:

…clase distancia perpendicular entre planos paralelos

Suponga que tenemos dos plano paralelos cualesquiera: $5x + 4y - 3z + 15 = 0$ y $10x + 8y - 6z - 30 = 0$ y se requiere conocer la distancia más corta entre ellos.



1) Se calcula un punto contenido en el plano 1 (punto P), para ello se dan valores arbitrarios a dos de las tres variables

   Si "y=0" y "z=0"

$$5x + 4(0) - 3(0) + 15 = 0$$

$$x = \frac{-15}{5} = -3$$

Mtra. Ma. De los Ángeles Martínez Cosío

…clase distancia perpendicular entre planos paralelos

Por tanto

$$P(-3,0,0)$$

2) Se calcula un punto contenido en el plano 2 (punto Q), para ello se dan valores arbitrarios a dos de las tres variables.
   Si "x=0" y "y=0"

$$10(0)+8(0)-6z-30=0$$
$$z=\frac{30}{-6}=-5$$

Por tanto

$$Q(0,0,-5)$$

…clase distancia perpendicular entre planos paralelos

3) Se obtiene el vector PQ

$$\overline{PQ} = (0-(-3))i + (0-0)j + (-5-0)k$$

$$\overline{PQ} = 3i - 5k$$

4) Se identifica el vector director del plano (Vector $\overline{M}$ o vector $\overline{N}$)

$$5x + 4y - 3z + 15 = 0$$

Por tanto: $\overline{M} = 5i + 4j - 3k$

…clase distancia perpendicular entre planos paralelos

5) Se realiza una proyección de $\overline{PQ}$ en $\overline{M}$ ó $\overline{N}$

$$Proy_{\overline{PQ}\to\overline{M}} = \frac{\overline{PQ}\cdot\overline{M}}{|\overline{M}|} = \frac{(3)(5)+(0)(4)+(-5)(-3)}{\sqrt{25+16+9}}$$

$$Proy_{\overline{PQ}\to\overline{M}} = \frac{15+0+15}{\pm\sqrt{50}} = \frac{30}{\pm\sqrt{50}}$$

$$distancia = Proy_{A\to B} = 4.24266\ \text{u}$$ ✓

…Otro ejemplo

Suponga que dos plano paralelos cualesquiera: $3x+5y+2z-8=0$ y $-6x-10y-4z+20=0$ y se requiere conocer la distancia más corta entre ellos.

1) Se calcula un punto contenido en el plano 1 (punto P), para ello se dan valores arbitrarios a dos de las tres variables

   Si "x=0" y "z=0"

$$3(0)+5(0)+2z-8=0$$
$$z=\frac{8}{2}=4$$

   Por tanto

$$P(0,0,4)$$

2) Se calcula un punto contenido en el plano 2 (punto Q), para ello se dan valores arbitrarios a dos de las tres variables.

   Si "x=0" y "z=0"

$$-6(0)-10y-4(0)+20=0$$
$$y=\frac{-20}{-10}=2$$

   Por tanto

$$Q(0,2,0)$$

Se puede elegir cualquier variable para despejar y se pueden dar cualesquiera valores arbitrarios, el resultado será el mismo*

3) Se obtiene el vector PQ

$$\overline{PQ}=(0-0))i+(2-0)j+(0-4)k$$
$$\overline{PQ}=2j-4k$$

…Otro ejemplo

4) Se identifica el vector director del plano (Vector $\overline{M}$ o vector $\overline{N}$)

$$-6x - 10y - 4z + 20 = 0$$

Por tanto: $$\overline{N} = -6i - 10j - 4k$$

5) Se realiza una proyección de $\overline{PQ}$ en $\overline{M}$ ó $\overline{N}$

$$Proy_{\overline{PQ}\to\overline{M}} = \frac{\overline{PQ}\cdot\overline{N}}{|N|} = \frac{(0)(-6)+(2)(-10)+(-4)(-4)}{\sqrt{36+100+16}}$$

$$Proy_{\overline{PQ}\to\overline{M}} = \frac{-20+16}{\pm\sqrt{152}} = \frac{-4}{\pm\sqrt{152}}$$

Si el numerador es negativo, se toma el valor negativo de la raíz cuadrada

$$distancia = Proy_{A\to B} = 0.3244 \text{ u}$$

*Nota, es más fácil trabajar si se identifica al despejar, de cuál variable da un valor más fácil de manejar y también se facilitan las operaciones si se dan valores arbitrarios de cero a las otras dos variables.

…Otra forma de resolver

Otra forma de resolver estos ejercicios es encontrando un punto contenido en uno de los planos y utilizar la fórmula de distancia de un punto a un plano, veamos el mismo ejercicio que planteamos antes:

Suponga que tenemos dos planos paralelos cualesquiera: $5x+4y-3z+15=0$ y $10x+8y-6z-30=0$ y se requiere conocer la distancia más corta entre ellos.

Se calcula un punto contenido en el plano 1 (punto P), para ello se dan valores arbitrarios a dos de las tres variables

Si "x=0" y "z=0"

$$5x+4(0)-3(0)+15=0$$
$$x=\frac{-15}{5}=-3$$

…otra forma de resolver

Por tanto

$$P(-3,0,0)$$

Ahora, con este punto y el otro plano, usaremos la fórmula de distancia perpendicular de un punto a un plano:

$$10x + 8y - 6z - 30 = 0$$

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

…otra forma de resolver

Quedaría

$$d = \left|\frac{(10)(-3) + (8)(0) + (-6)(0) - 30}{\sqrt{10^2 + 8^2 + (-6)^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{-30 - 30}{\sqrt{100 + 64 + 36}}\right|$$

$$d = \left|\frac{-60}{\sqrt{200}}\right|$$

$$d = |-4.2426|$$

$$d = 4.2426\,u \checkmark$$