Producto Cruz o Producto vectorial

De la definición de producto cruz, lo importante es recordar que "La dirección de C = A x B es un vector perpendicular al plano que forman A y B"

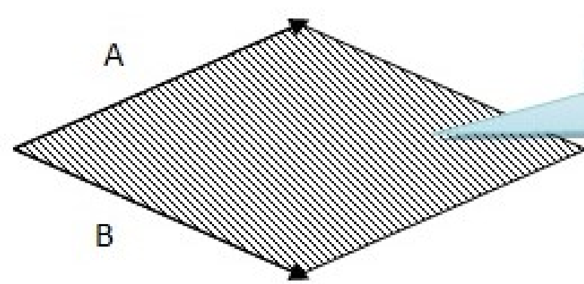
Además, de las propiedades que se encuentran en el material "Productos escalar y vectorial", es importante tener presente:

6. Dados $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ y $B = B_1 i + B_2 j + B_3 k$, se verifica:

$$A \: X \: B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Para formulario

7. La magnitud de A X B representa el área del paralelogramo de lado A y B.



|A X B| = Área del paralelogramo de lados A y B

Ejercicio producto cruz

Ejemplo 1:

Hallar un vector unitario, perpendicular al plano en el que se encuentran los vectores A= -2i + 3j -5k y B= 4i + j – 2k

$$A\ X\ B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$A\ X\ B = (3)(-2)i + (-5)(4)j + (-2)(1)k - (-5)(1)i - (-2)(-2)j - (4)(3)k$$

$$A\ X\ B = -i - 24j - 14k$$

$$|AXB| = \sqrt{773}$$

$$Vector\ Unitario = -\frac{1}{\sqrt{773}}i - \frac{24}{\sqrt{773}}j - \frac{14}{\sqrt{773}}k$$

Otro ejercicio producto cruz

Ejemplo 2:

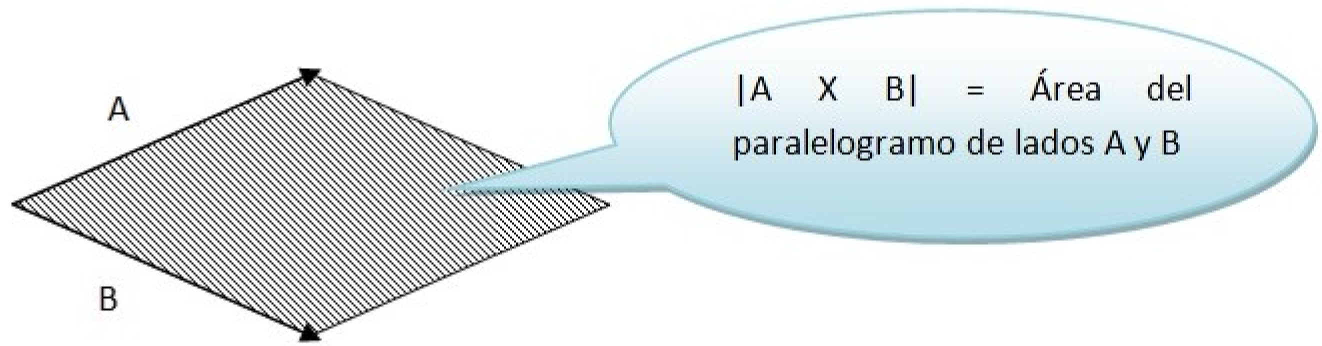
Hallar el área del paralelogramo formado por los vectores A= $4i + 2j - 3k$ y B= i + 6 j – 3k

$$A\ X\ B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A\ X\ B = (2)(-3)i + (-3)(1)j + (4)(6)k - (-3)(6)i - (4)(-3)j - (2)(1)k$$

$$A\ X\ B = 12i + 9j + 22k$$

$$|AXB| = \sqrt{709} = 26.63u^2$$



Tercer ejemplo

Ejemplo 3

Dados los vectores A = 2i +3j – 4k y B = i + 5j +3k, son los lados de un triángulo, hallar el área de este triángulo.

$$A\ X\ B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

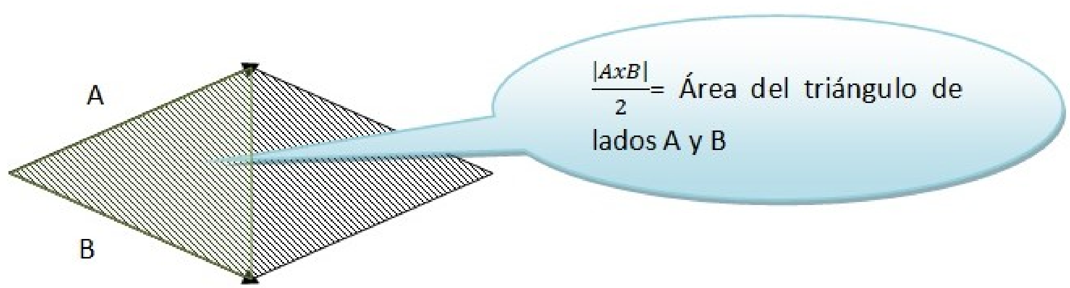
$$A\ X\ B = (3)(3)i + (-4)(1)j + (2)(5)k - (-4)(5)i - (2)(3)j - (3)(1)k$$

$$A\ X\ B = 29i - 10j + 7k$$

$$|AXB| = \sqrt{990} = 31.46u^2$$

Lo obtenido aquí es el área del paralelogramo, para obtener el área del triángulo, debemos dividir entre dos

$$Area\ del\ triángulo = \frac{|AXB|}{2} = 15.73u^2$$



Cuarto ejemplo

Ejemplo 4

Si las diagonales de un paralelogramo son los vectores A = 4i +6j + k y B = 5i + 2j -3k, hallar el área del paralelogramo.

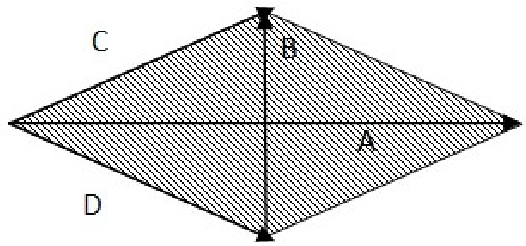
$$A\ X\ B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A\ X\ B = (6)(-3)i + (5)(1)j + (2)(4)k - (2)(1)i - (4)(-3)j - (6)(5)k$$

$$A\ X\ B = -20i + 17j - 22k$$

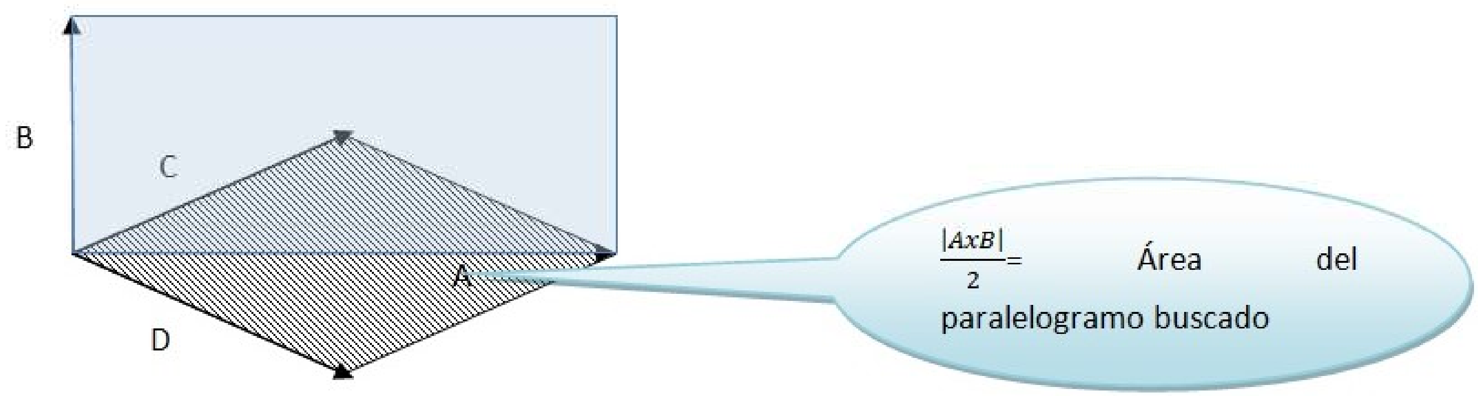
$$|AXB| = \sqrt{1173} = 34.25u^2$$

Lo obtenido aquí es el área de un paralelogramo, pero no es el buscado ya que tomamos las diagonales para hacer el producto cruz



…cuarto ejemplo

Observar que no hemos trabajado con los vectores C y D, sino con A y B, que son las diagonales, por tanto el área obtenida es la que se observa en azul:



El área obtenida (azul) es el doble del área buscada (gris)

…cuarto ejemplo

Entonces debemos dividir el resultado entre dos

$$Area\ del\ paralelogramo\ buscado = \frac{|AXB|}{2} = 17.12u^2$$

Nota, únicamente en dos casos se divide el área entre dos: 1) cuando dan las diagonales como dato y se pide encontrar el área del paralelogramo, 2) cuando dan los lados de un triángulo como dato y se pide encontrar el área del triángulo