# Clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

En muchos casos los vectores dependen de una o más variables, aquellos casos en los que dependen de una variable, ésta variable generalmente es el tiempo "t". Si suponemos que una partícula se mueve en el espacio, las coordenadas (x, y, z) de esta partícula en el espacio están determinadas en función del tiempo (parámetro "t")

$$x = x(t)$$

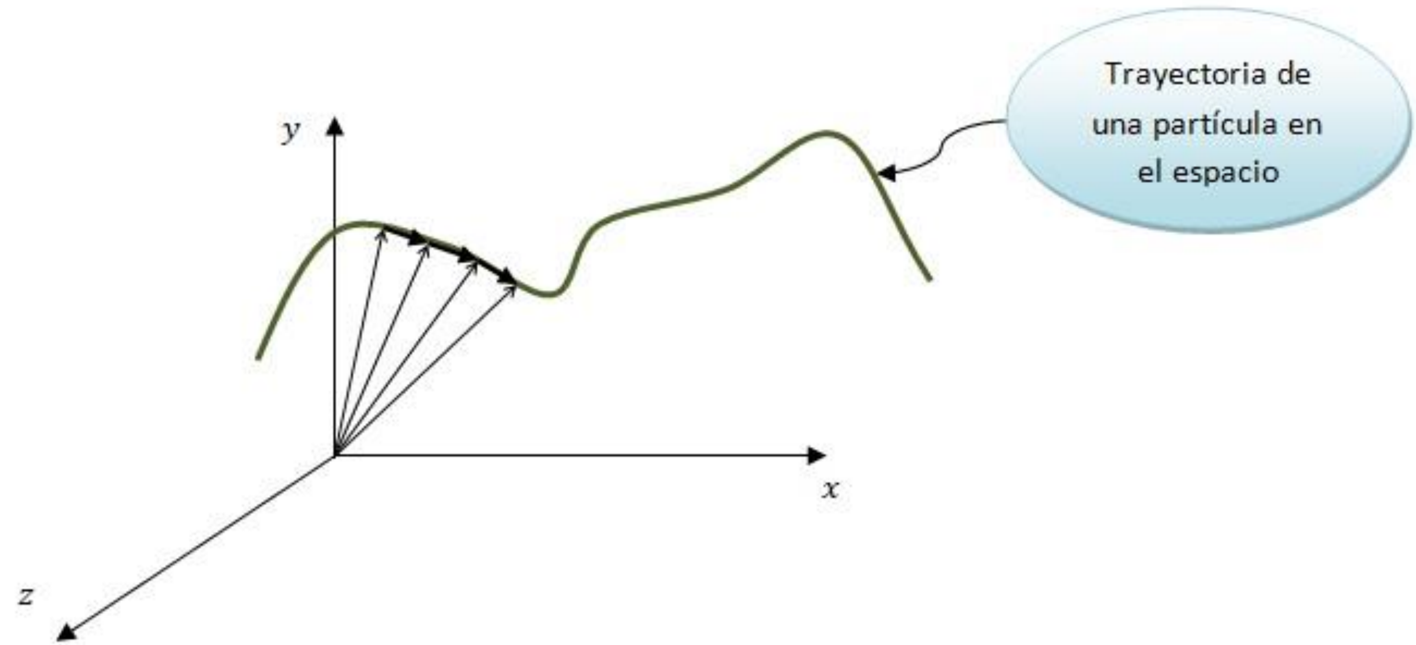
$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

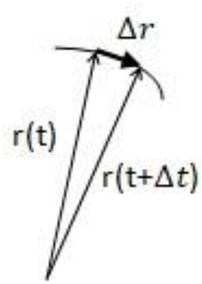
Estas son ecuaciones paramétricas de la trayectoria de una partícula o un cuerpo que se mueve en el espacio en función del parámetro tiempo "t". Esto quiere decir que para cualquier tiempo "t" podemos localizar la posición (x, y, z) de la partícula. Una forma de describir el movimiento de la partícula es refiriéndolo al origen mediante el vector de posición (r) que expresado en forma vectorial es:

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

# …clase diferenciación e integración




Observando por separado un intervalo de tiempo:



# …clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

Para poder calcular la velocidad de la partícula en movimiento debemos considerar que en el tiempo $t+\Delta t$ la posición del vector cambió a $r(t+\Delta t)$, es decir:

$$r(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)i + y(t+\Delta t)j + z(t+\Delta t)k$$

De esta forma el desplazamiento o vector desplazamiento en un intervalo de tiempo que va desde $t$ hasta $(t+\Delta t)$ está dado por

$$r(t+\Delta t) - r(t)$$

Y es el vector del desplazamiento $\Delta r$, es decir:

$$\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$$

Para un intervalo de tiempo $\Delta t$ muy pequeño, **el desplazamiento $\Delta r$ es la tangente de la curva** en el punto x(t), y(t), z(t), como se observa en la figura anterior.

Por otro lado, recordando que la definición de velocidad es la distancia que se desplaza un objeto en un tiempo determinado:

$$v = \frac{d}{t}$$

# …clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

Entonces, para nuestra partícula que se desplaza en el espacio tendremos:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea v es el límite de la velocidad media cuando $\Delta t$ tiende a cero

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

Para calcular esta cantidad, debemos considerar las componentes del vector de posición:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} i + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} j + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} k$$

Pasando al límite las componentes, tendremos:

$$v = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k$$

Para formulario

Y el vector que resulta es el vector que representa la velocidad de la partícula en ese punto, donde los coeficientes de i, j, k son las componentes de la velocidad.

# …clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

La aceleración, por otra parte, se calcula a partir de la segunda derivada de la velocidad, es decir:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j + \frac{d^2z}{dt^2}k$$

Para formulario

La diferenciación defunciones vectoriales se desarrolla aplicando las mismas reglas que para diferenciar las funciones escalares que forman los componentes de la función vectorial, de esta manera también podemos determinar la integración de este tipo de funciones:

$$\frac{dr(t)}{dt} = v(t)$$

Está dado por:

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^{t_n} v(t)dt$$

Es decir:

$$r(t) = r(t_0) + \left[\int_{t_0}^{t_n} v_x(t)dt\right] i + \left[\int_{t_0}^{t_n} v_y(t)dt\right] j + \left[\int_{t_0}^{t_n} v_z(t)dt\right] k$$

# …clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

Veamos cómo se resuelven algunos ejercicios

Si el movimiento de una partícula a lo largo de una curva es $x = 2t^3$, $y = t^2 + 4t$, $z = 3t - 5$, siendo t el tiempo, hallar las componentes de la velocidad y la aceleración en el instante t=2

Nota: Recordemos algunas fórmulas de derivación:

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

$$\frac{d}{dx}(u + v + w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}cu = c\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

# …clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

Primero vamos a identificar el vector de posición r:

$$r = 2t^3 i + (t^2 + 4t)j + (3t - 5)k$$

Entonces $\frac{dr}{dt}$ es:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}[2t^3 i + (t^2 + 4t)j + (3t - 5)k]$$

$$\frac{dr}{dt} = 6t^2\, i + (2t + 4)j + 3k$$

Si t = 2, tendremos:

$$\frac{dr}{dt} = 6(2^2)i + [(2)(2) + 4]j + 3k$$

$$v = \frac{dr}{dt} = 24i + 8j + 3k \checkmark$$

# …clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

Y para encontrar la aceleración, tendremos:

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}[6t^2i + (2t+4)j + 3k]$$

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = 12ti + 2j$$

Si t=2, tendremos:

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = 12(2)i + 2j$$

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = 24i + 2j \checkmark$$

# …clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

Otro ejemplo:

Una partícula que se mueve a lo largo de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = e^{-t}$, $y = 2\cos 3t$, $z = 2\sin 3t$ si t es el tiempo, hallar la magnitud de la velocidad y de la aceleración en el instante t=0

Nota: Recordemos algunas fórmulas de derivación:

$$\frac{d}{dx} cu = c\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$$

# …clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

Primero vamos a identificar el vector de posición r:

$$r = e^{-t} i + 2\cos 3t\ j + 2\sin 3t\, k$$

Entonces $\frac{dr}{dt}$ es:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}[e^{-t} i + 2\cos 3t\, j + 2\sin 3t\, k]$$

$$\frac{dr}{dt} = -e^{-t}\, i + 2(3)(-\sin 3t)j + 2(3)(\cos 3t)k$$

$$\frac{dr}{dt} = -e^{-t}\, i - 6(\sin 3t)j + 6(\cos 3t)k$$

Si t = 0, tendremos:

$$\frac{dr}{dt} = -e^{0}\, i - 6(\sin 3(0))j + 6(\cos 3(0))k$$

$$\frac{dr}{dt} = -1\, i + 6k$$

Recordemos que todo número elevado a cero es uno, que Sen 0 =0 y cos 0 = 1

# …clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

Obteniendo la magnitud, tenemos:

$$v = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 6^2} \checkmark$$

$$v = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{37} \checkmark$$

Y para encontrar la aceleración, tendremos:

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}[-e^{-t}\, i - 6(\sin 3t)j + 6(\cos 3t)k]$$

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = e^{-t}i - 18(\cos 3t)j - 18(\sin 3t)k$$

# ...clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

Si t=0, tendremos:

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = e^0 i - 18(\cos 3(0))\, j - 18(\sin 3(0))k$$

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = i - 18j$$

Recordemos que todo número elevado a cero es uno, que Sen 0 =0 y cos 0 = 1

Obteniendo la magnitud, tenemos:

$$a = \left|\frac{d^2r}{dt^2}\right| = \sqrt{1^2 + (-18)^2}$$

$$a = \left|\frac{d^2r}{dt^2}\right| = \sqrt{325}\checkmark$$

# …clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

Hallar el vector tangente en un punto cualquiera de la curva $x = t^2 + 1$, $y = 4t - 3$, $z = 2t^2 - 6t$ y también encontrar para la misma curva, el vector tangente unitario en el punto correspondiente al instante t=2

Primero debemos encontrar el vector deposición r:

$$r = (t^2 + 1)i + (4t - 3)j + (2t^2 - 6t)k$$

Para encontrar el vector tangente, debemos hallar $\frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}[(t^2 + 1)i + (4t - 3)j + (2t^2 - 6t)k]$$

$$\frac{dr}{dt} = 2t\ i + 4j + (4t - 6)k \checkmark$$

Vector tangente en un punto cualquiera

Si t=2, hallaremos el vector tangente en ese instante:

$$\frac{dr}{dt} = 2(2)\ i + 4j + [4(2) - 6]k$$

# …clase diferenciación e integración vectorial y vector tangente

$$\frac{dr}{dt} = 4\,i + 4j + 2k$$

Ahora obtendremos el vector unitario:

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36}$$

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = 6$$

$$Vector\ unitario_{\frac{dr}{dt}} = \frac{4}{6}i + \frac{4}{6}j + \frac{2}{6}k$$

$$Vector\ unitario_{\frac{dr}{dt}} = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k \checkmark$$

Vector Unitario en el instante t=2