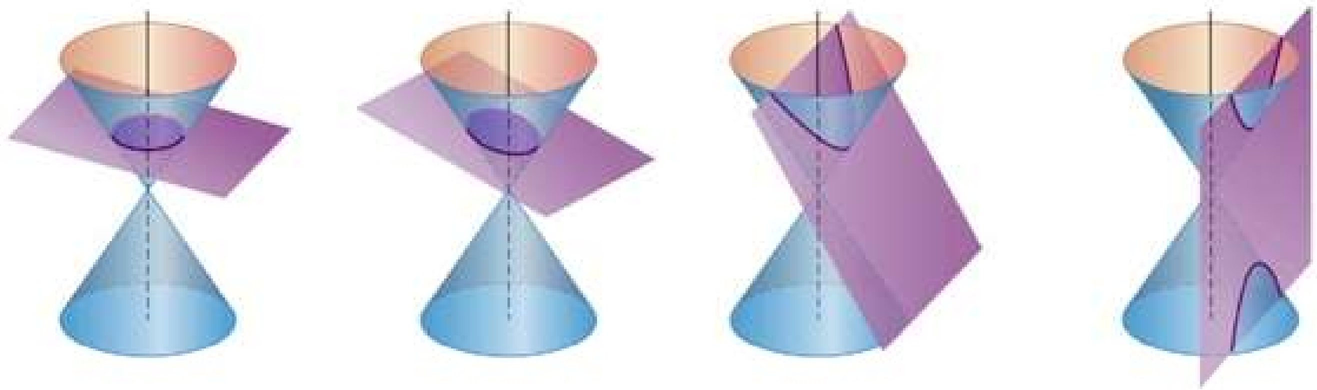
Clase parametrización de secciones cónicas en el plano

Como apreciamos en la figura siguiente (tomada de la página 61 Addison-Wesley de Edit. Pearson), las secciones cónicas son la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola:



Circle: plane perpendicular to cone axis

Ellipse: plane oblique to cone axis

Parabola: plane parallel to side of cone

Hyperbola: plane cuts both halves of cone

(a)

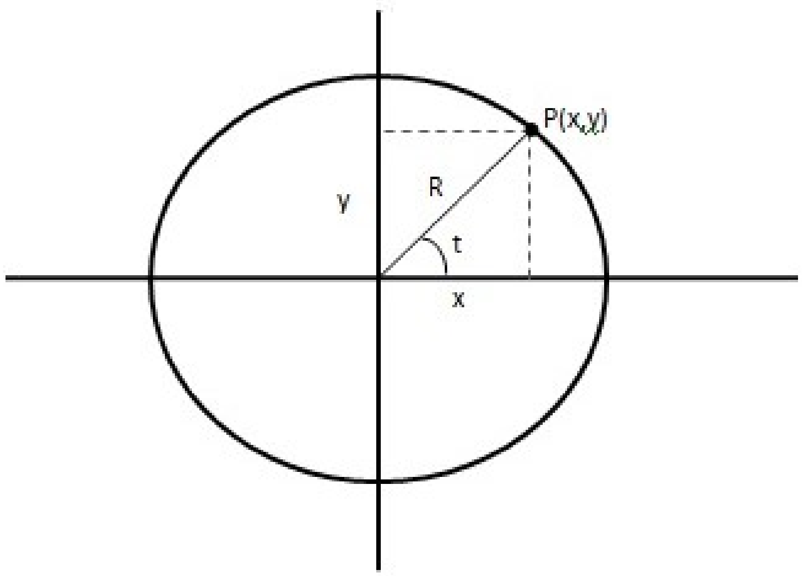
Estas secciones cónicas tienen gran aplicación en muchas áreas por lo que debemos aprender a parametrizarlas para su análisis posterior.

Nota. Recordemos las ecuaciones de estas figuras:

Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parábola	$y^2 = px$
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

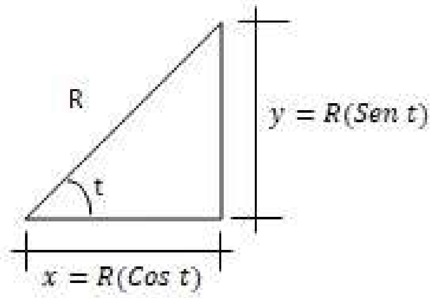
1) Para parametrizar la **circunferencia**, debemos suponer que tenemos un punto P cualquiera, de coordenadas "x" y "y", moviéndose en el perímetro de la circunferencia, con radio R, ahora supongamos que "t" es el ángulo que se forma con el desplazamiento del punto P en la trayectoria de la circunferencia:



Mtra. Ma. De los Ángeles Martínez Cosío

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

De esto podemos analizar el triángulo rectángulo que se forma y obtener:



Si R es la hipotenusa y t el ángulo, con las funciones seno y coseno obtenemos los catetos en función de R y t

$$Sen\ \theta = \frac{C.op.}{Hip} \qquad Cos\ \theta = \frac{C.ady}{Hip}$$

$$Sen\ t = \frac{y}{R} \qquad Cos\ t = \frac{x}{R}$$

$$y = R(Sen\ t) \qquad x = R(Cos\ t)$$

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

Ahora, si queremos que el punto P se desplace por toda la trayectoria de la superficie, debe seguir la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ecuación de la circunferencia

Substituyendo:

$$(R\ Cos\ t)^2 + (R\ Sen\ t)^2 = R^2$$

$$R^2\ Cos^2\ t + R^2\ Sen^2 t = R^2$$

$$R^2(Cos^2 t + Sen^2 t) = R^2$$

$$Cos^2 t + Sen^2 t = 1$$

Identidad trigonométrica

Nuestra ecuación se asemeja a la identidad trigonométrica

De las ecuaciones paramétricas:

$$x = R(Cos\ t)$$

$$y = R(Sen\ t)$$

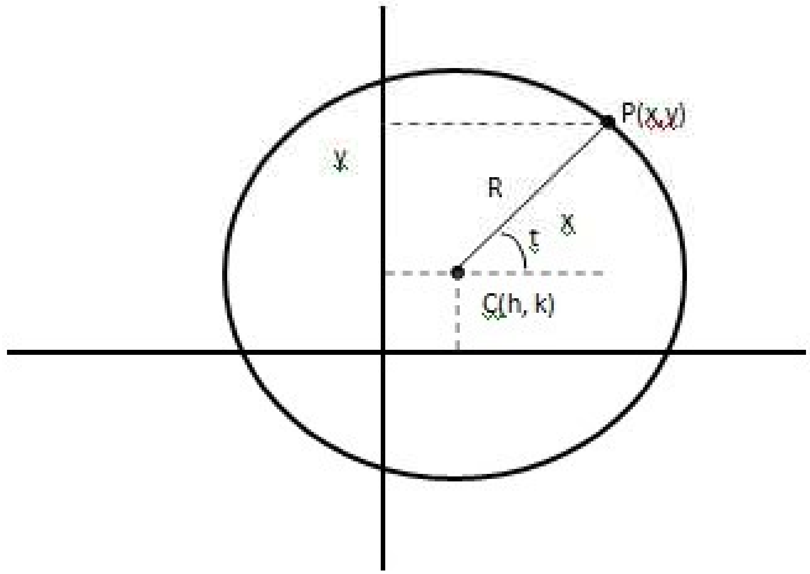
…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

Podemos identificar los límites de nuestra circunferencia en la tabla siguiente

t (grados)	t (radianes)	Límites [x,y]
0	0	$[R, 0]$
90	$\pi/2$	$[0, R]$
180	π	$[-R, 0]$
270	$3\pi/2$	$[0, R]$
360	2π	$[R, 0]$

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

1.a) Para parametrizar una **circunferencia** cuyo centro está fuera del origen debemos:



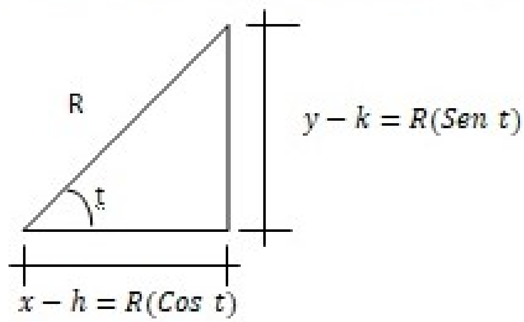
…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

La ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Para este caso, el triángulo rectángulo que se forma es el siguiente:

De esto podemos analizar el triángulo rectángulo que se forma y obtener:



Mtra. Ma. De los Ángeles Martínez Cosío

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

Si R es la hipotenusa y t el ángulo, con las funciones seno y coseno obtenemos los catetos en función de R y t

$$Sen\ \theta = \frac{C.op.}{Hip}$$
$$Sen\ t = \frac{y-k}{R}$$
$$y = R(Sen\ t) + k$$

$$Cos\ \theta = \frac{C.ady}{Hip}$$
$$Cos\ t = \frac{x-h}{R}$$
$$x = R(Cos\ t) + h$$

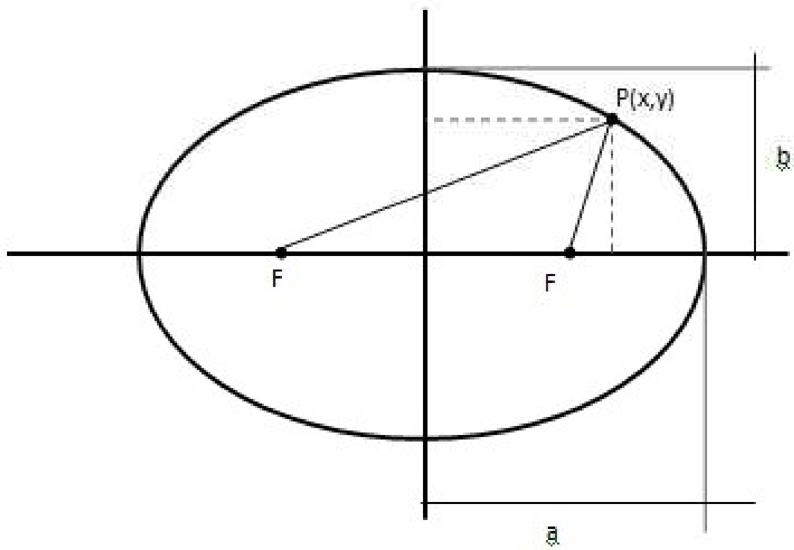
Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = R(Cos\ t) + h$$

$$y = R(Sen\ t) + k$$

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

2) Vamos ahora a parametrizar la **elipse**, para ello debemos considerar la ecuación de la elipse como si fuera de la forma de la identidad trigonométrica $sen^2t + cos^2t = 1$



La ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

Equiparando esta ecuación con la identidad trigonométrica:

$$sen^2t + cos^2t = 1$$

Es entonces que:

$\frac{x^2}{a^2} = sen^2t$ $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = sen^2t$ $\frac{x}{a} = \sqrt{sen^2t}$ $\frac{x}{a} = sen\ t$ $x = a(sen\ t)$	$\frac{y^2}{b^2} = cos^2t$ $\left(\frac{y}{b}\right)^2 = cos^2t$ $\frac{y}{b} = \sqrt{cos^2t}$ $\frac{y}{b} = \cos t$ $y = b(\cos t)$

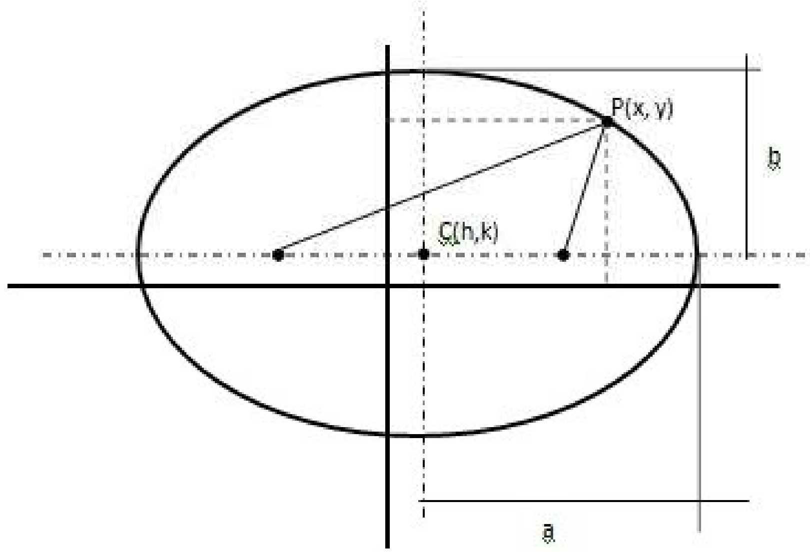
Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$x = a(sen\ t)$$

$$y = b(\cos t)$$

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

2.a) Para parametrizar una **elipse** cuyo centro está fuera del origen, debemos:



La ecuación de la elipse

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Ecuación de la elipse

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

Equiparando esta ecuación con la identidad trigonométrica:

$$sen^2t + cos^2t = 1$$

Es entonces que:

$\frac{(x-h)^2}{a^2} = sen^2t$ $\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 = sen^2t$ $\frac{x-h}{a} = \sqrt{sen^2t}$ $\frac{x-h}{a} = sen\ t$ $x = a(sen\ t) + h$	$\frac{(y-k)^2}{b^2} = cos^2t$ $\left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = cos^2t$ $\frac{y-k}{b} = \sqrt{cos^2t}$ $\frac{y-k}{b} = \cos t$ $y = b(\cos t) + k$

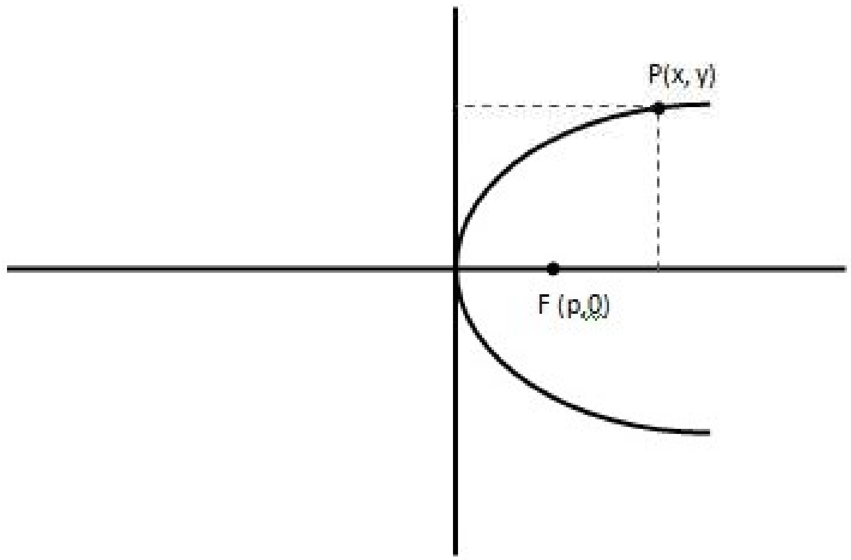
Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$x = a(sen\ t) + h$$

$$y = b(\cos t) + k$$

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

3) Para parametrizar la **parábola**, partimos de su ecuación (no confundir "P" que es el punto que se desplaza en la parábola, con "p" que es la coordenada en x del foco F):



…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

$$y^2 = px$$

Ecuación de la parábola

Si hacemos y=t, tendremos:

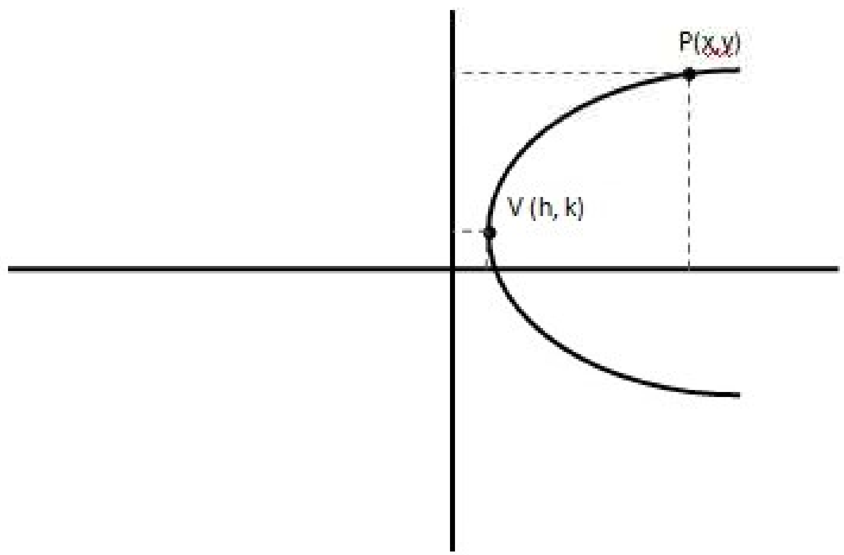
$$y = t$$

$$x = \frac{t^2}{p}$$

Y así tendremos las ecuaciones paramétricas de la parábola

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

3.a) Para parametrizar la **parábola**, con vértice fuera del origen, partimos de su ecuación (no confundir "P" que es el punto que se desplaza en la parábola, con "p" que es la coordenada en x del foco F):



…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

$$(y-k)^2 = p(x-h)$$

Ecuación de la parábola

Si hacemos y=t, tendremos:

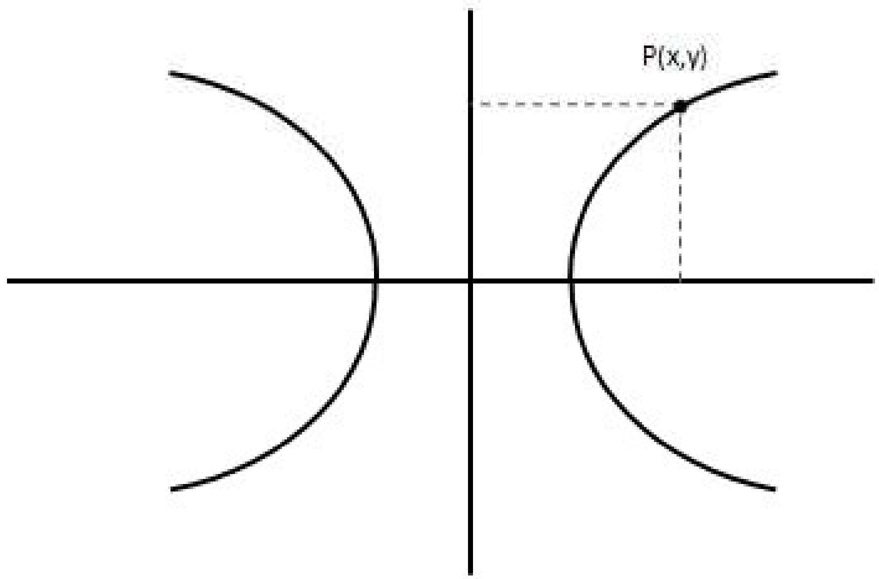
$$y = t$$

$$x = \frac{(t-k)^2}{p} + h$$

Y así tendremos las ecuaciones paramétricas de la parábola

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

4) Para parametrizar la **hipérbola** partimos de considerar la ecuación de la hipérbola como si fuera de la forma de la identidad trigonométrica $cosh^2t - senh^2t = 1$



…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

La ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la hipérbola

Equiparando esta ecuación con la identidad trigonométrica:

$$cosh^2 t - senh^2 t = 1$$

Identidad trigonométrica

Entonces podemos igualar:

$$\frac{x^2}{a^2} = cosh^2 t \qquad \frac{y^2}{b^2} = senh^2 t$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = cosh^2 t \qquad \left(\frac{y}{b}\right)^2 = senh^2 t$$

$$\frac{x}{a} = \sqrt{(cosh)^2 t} \qquad \frac{y}{b} = \sqrt{(senh)^2 t}$$

$$\frac{x}{a} = \cosh t \qquad \frac{y}{b} = senh\, t$$

$$x = a\,(\cosh t) \qquad y = b\,(senh\, t)$$

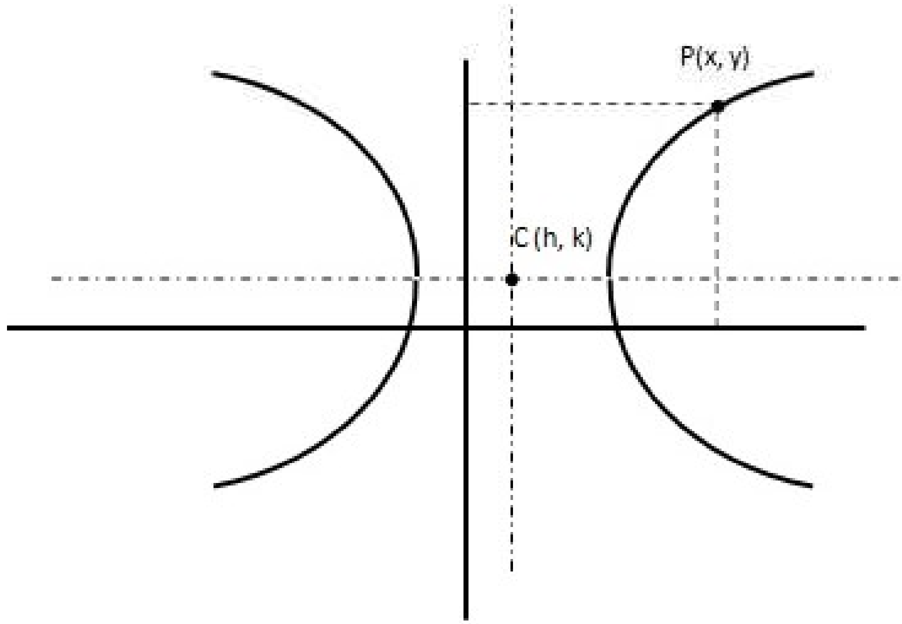
Las ecuaciones paramétricas de la hipérbola son:

$$x = a\,(\cosh t)$$

$$y = b\,(senh\, t)$$

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

4.a) Para parametrizar la **hipérbola** con centro fuera del origen, partimos de considerar la ecuación de la hipérbola como si fuera de la forma de la identidad trigonométrica $cosh^2t - senh^2t = 1$



…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

La ecuación de la hipérbola

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Ecuación de la hipérbola

Equiparando esta ecuación con la identidad trigonométrica:

$$cosh^2t - \ senh^2t = 1$$

Identidad trigonométrica

…clase parametrización de secciones cónicas en el plano

Entonces podemos igualar:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} = cosh^2 t$$
$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 = cosh^2 t$$
$$\frac{x-h}{a} = \sqrt{(cosh)^2 t}$$
$$\frac{x-h}{a} = \cosh t$$
$$x = a\,(\cosh t) + h$$

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} = senh^2 t$$
$$\left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = senh^2 t$$
$$\frac{y-k}{b} = \sqrt{(senh)^2 t}$$
$$\frac{y-k}{b} = senh\, t$$
$$y = b\,(senh\, t) + k$$

Las ecuaciones paramétricas de la hipérbola son:

$$x = a\,(\cosh t) + h$$

$$y = b\,(senh\, t) + k$$