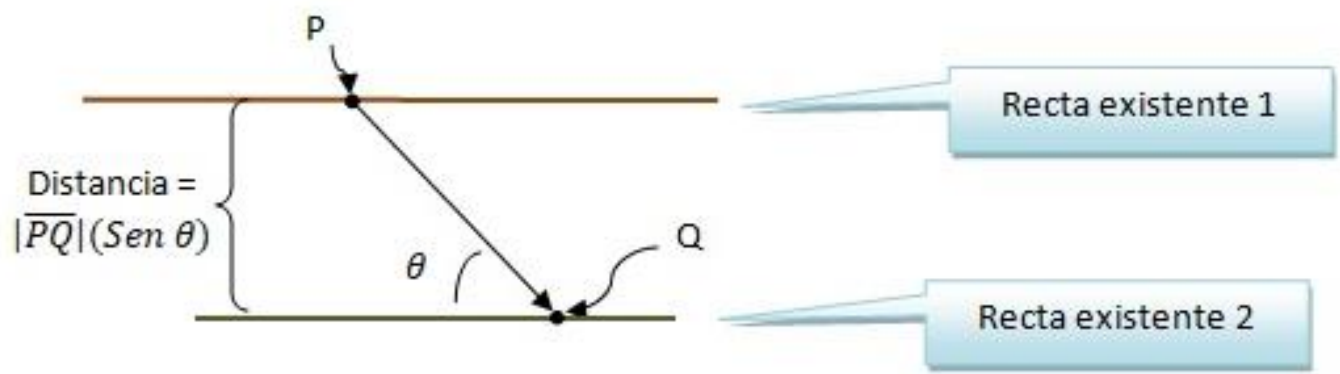
Clase distancia perpendicular entre rectas paralelas

Nota.- Son rectas paralelas aquellas que mantienen la misma distancia entre ellas y pueden prolongarse hasta el infinito sin tocarse en ningún punto. Esas rectas tiene los mismos números directores o sus vectores directores son iguales.

Para obtener la distancia perpendicular entre dos rectas paralelas, se debe seguir un procedimiento:

Suponga dos rectas cualesquiera $\frac{(x-6)}{3}=\frac{(y-4)}{-5}=\frac{(z+1)}{2}$ y $\frac{(x+3)}{3}=\frac{(y-1)}{-5}=\frac{(z-7)}{2}$, hallar la distancia más corta o distancia perpendicular que existe entre ellos.



Mtra. Ma. De los Ángeles Martínez Cosío
Junio 20

…clase distancia perpendicular entre rectas paralelas

1) Se calcula un punto contenido en la primer recta conocida $\frac{(x-6)}{3} = \frac{(y-4)}{-5} = \frac{(z+1)}{2}$, éste será el punto P, para ello se pueden tomarlos valores de x_0, y_0, z_0 de esta recta, que son los que se restan de x, y, z, respectivamente (considerando el cambio de signo ya que la fórmula nos indican que se restan de x, y, z). Por tanto:

$$P\ (6, 4, -1)$$

2) Se calcula un punto contenido en la segunda recta conocida $\frac{(x+3)}{3} = \frac{(y-1)}{-5} = \frac{(z-7)}{2}$, éste será el punto Q, para ello se pueden tomarlos valores de x_0, y_0, z_0 de esta recta, que son los que se restan de x, y, z, respectivamente (considerando el cambio de signo ya que la fórmula nos indican que se restan de x, y, z). Por tanto:

$$Q\ (-3, 1, 7)$$

3) Se obtiene el vector PQ

$$\overline{PQ} = (-3-6)i + (1-4)j + \big(7-(-1)\big)k$$

$$\overline{PQ} = -9i - 3j + 8k$$

…clase distancia perpendicular entre rectas paralelas

4) Se identifica el vector director de la recta (Vector $\bar{M}$ o $vector$ $\bar{N}$)

$$\frac{(x-6)}{3} = \frac{(y-4)}{-5} = \frac{(z+1)}{2}$$

Por tanto: $\bar{M} = 3i - 5j + 2k$

5) Se calcula el ángulo entre $\overline{PQ}$ y $\bar{M}$

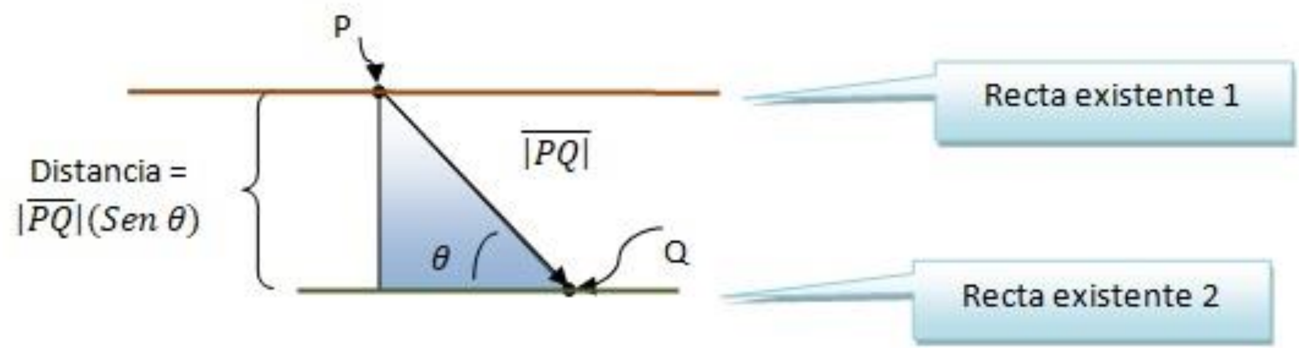
$$Cos\,\theta = \frac{\overline{PQ} \cdot \bar{M}}{|\overline{PQ}||\bar{M}|} = \frac{(-9)(3) + (-3)(-5) + (8)(2)}{\sqrt{81 + 9 + 64}\sqrt{9 + 25 + 4}}$$

$$Cos\,\theta = \frac{-27 + 15 + 16}{\sqrt{154}\sqrt{38}} = \frac{4}{\sqrt{154}\sqrt{38}}$$

$$\theta = 87.0027°$$

…clase distancia perpendicular entre rectas paralelas

6) Ahora se considera el triángulo rectángulo que se forma entre los vectores PQ y M (o N) y a partir del triángulo, se obteien la distancia que es cateto opuesto del triángulo:



$$Sen\ \theta = \frac{C.op.}{Hip} = \frac{distancia}{|\overline{PQ}|}$$

$$Distancia = |\overline{PQ}|(Sen\ \theta)$$

Entonces:

$$Distancia = \sqrt{154}(Sen\ 87.0027)$$

$$Distancia = 12.3927\ u\ \checkmark$$

…clase distancia perpendicular entre rectas paralelas

Nota.-En los casos en que la ecuación de la recta está en forma paramétrica o vectorial, igual se sugiere considerar el punto P_0 como el que se forma con los términos independientes, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3t - 4 \\ y = -5t + 1 \\ z = 2t + 7 \end{array}\right\} \quad Q = P_0(-4, 1, 7)$$

En estos casos no se les cambia el signo porque ya se cambiaron al pasar al segundo término.

Y $\bar{M}$ se forma con los coeficientes de t: $\quad \bar{M} = 3i - 5j + 2k$

De igual manera con la ecuación vectorial:

$$[x, y, z] = [(2t - 1), (-7t + 3), (2t - 5)]$$
$$Q = P_0(-1, 3, -5)$$

Y en estos casos, $\bar{M}$ también se forma con los coeficientes de t: $\quad \bar{M} = 2i - 7j + 2k$

…clase distancia perpendicular entre rectas paralelas

Otro ejemplo, ahora considerando que en una de las rectas están las ecuaciones simétricas trabajadas en parejas de quebrados:

Obtener la distancia más corta entre la recta $\frac{(x-1)}{9} = \frac{(y+5)}{-7} = \frac{(z-8)}{-3}$ y la recta:

$$\left.\begin{array}{l} -7x + 28 = 9y + 18 \\ -3x + 12 = 9z + 45 \\ -3y - 6 = -7z - 35 \end{array}\right\}$$

Recta 2. Ecuaciones simétricas trabajadas en parejas

1) Primero identificaremos el punto en la recta uno, que será el punto P:

$$\frac{(x-1)}{9} = \frac{(y+5)}{-7} = \frac{(z-8)}{-3}$$

$$P(1, -5, 8)$$

…clase distancia perpendicular entre rectas paralelas

2) Ahora debemos trabajar y acomodar los quebrados de la recta dos para identificar el vector director y el punto contenida en ella:

$-7x+28=9y+18$ $-7(x-4)=9(y+2)$ $\frac{(x-4)}{9}=\frac{(y+2)}{-7}$	$-3x+12=9z+45$ $-3(x-4)=9(z+5)$ $\frac{(x-4)}{9}=\frac{(z+5)}{-3}$	$-3y-6=-7z-35$ $-3(y+2)=-7(z+5)$ $\frac{(y+2)}{-7}=\frac{(z+5)}{-3}$

$$\frac{(x-4)}{9}=\frac{(y+2)}{-7}=\frac{(z+5)}{-3}$$

De aquí obtenemos el punto Q contenido en la recta:

$$Q(4,-2,-5)$$

Recordemos que se pueden tomar los valores de x_0, y_0, z_0, que son los que se restan de x, y, z, respectivamente (considerando el cambio de signo ya que la fórmula nos indican que se restan de x, y, z).

…clase distancia perpendicular entre rectas paralelas

3) Se obtiene el vector PQ

$$\overline{PQ} = (4-1)i + (-2-(-5))j + (-5-8)k$$

$$\overline{PQ} = 3i + 3j - 13k$$

4) Se identifica entonces en vector $\bar{M}$ con los denominadores de las ecuaciones de alguna de las rectas:

$$\frac{(x-4)}{9} = \frac{(y+2)}{-7} = \frac{(z+5)}{-3}$$

Por tanto: $\bar{M} = 9i - 7j - 3k$

…clase distancia perpendicular entre rectas paralelas

5) Se calcula el ángulo entre $\overline{PQ}$ y $\overline{M}$

$$Cos\,\theta = \frac{\overline{PQ}\cdot\overline{M}}{|\overline{PQ}||\overline{M}|} = \frac{(3)(9)+(3)(-7)+(-13)(-3)}{\sqrt{9+9+169}\sqrt{81+49+9}}$$

$$Cos\,\theta = \frac{27-21+39}{\sqrt{187}\sqrt{139}} = \frac{45}{\sqrt{187}\sqrt{139}}$$

$$\theta = 73.7925°$$

6) Ahora se considera el triángulo rectángulo que se forma entre los vectores PQ y M y a partir del triángulo, se obtiene la distancia que es cateto opuesto del triángulo:

$$Distancia = |\overline{PQ}|(Sen\,\theta)$$

$$Distancia = \sqrt{187}(Sen\,73.7925)$$

$$Distancia = 13.1313\,u$$

...clase distancia perpendicular entre rectas paralelas

Otra forma de resolver es mediante la fórmula de distancia perpendicular entre un punto y una recta, para ello se debe obtener:

Un punto en cada una de las rectas (punto P y punto Q)

Se obtiene el vector PQ

Se obtiene el vector M o N

Y finalmente se aplica la fórmula de distancia de un punto a una recta, quedando así:

$$Distancia = \frac{|\overline{PQ}xM|}{|M|}$$

Para formulario

La distancia así obtenida es la distancia perpendicular entre las dos rectas paralelas