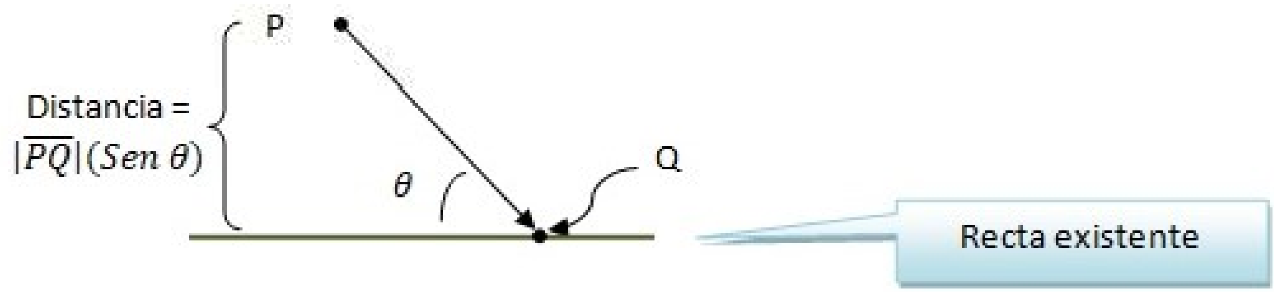
Clase distancia perpendicular de un punto a una recta

Para obtener la distancia perpendicular de un punto a una recta, se debe seguir un procedimiento:

Suponga una recta cualquiera $\frac{(x-6)}{3}=\frac{(y-4)}{-5}=\frac{(z+1)}{2}$ y un punto cualquiera fuera de la recta $P\ (-2, 7, -9)$ y se requiere conocer la distancia más corta entre ellos.



1) Se calcula un punto contenido en la recta conocida $\frac{(x-6)}{3}=\frac{(y-4)}{-5}=\frac{(z+1)}{2}$, éste será el punto Q, para ello se pueden tomarlos valores de x_0, y_0, z_0, que son los que se restan de x, y, z, respectivamente (considerando el cambio de signo ya que la fórmula nos indican que se restan de x, y, z). Por tanto:

$$Q\ (6, 4, -1)$$

…clase distancia perpendicular de un punto a una recta

2) Se obtiene el vector PQ

$$\overline{PQ} = (6-(-2))i + (4-7)j + \big(-1-(-9)\big)k$$

$$\overline{PQ} = 8i - 3j + 8k$$

3) Se identifica el vector director de la recta (Vector $\overline{M}$)

$$\frac{(x-6)}{3} = \frac{(y-4)}{-5} = \frac{(z+1)}{2}$$

Por tanto: $\overline{M} = 3i - 5j + 2k$

4) Se calcula el ángulo entre $\overline{PQ}$ y $\overline{M}$

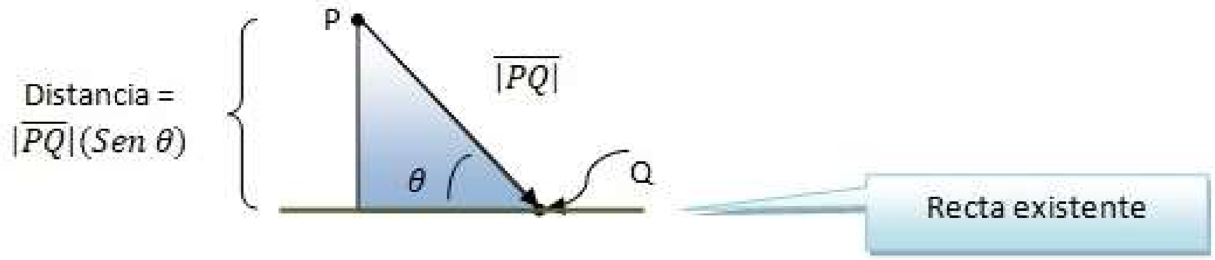
$$Cos\ \theta = \frac{\overline{PQ}\cdot\overline{M}}{|\overline{PQ}||\overline{M}|} = \frac{(8)(3)+(-3)(-5)+(8)(2)}{\sqrt{64+9+64}\sqrt{9+25+4}}$$

$$Cos\ \theta = \frac{24+15+16}{\sqrt{137}\sqrt{38}} = \frac{55}{\sqrt{137}\sqrt{38}}$$

$$\theta = 40.3349°$$

…clase distancia perpendicular de un punto a una recta

5) Ahora se considera el triángulo rectángulo que se forma entre los vectores PQ y M y a partir del triángulo, se obteien la distancia que es cateto opuesto del triángulo:



$$Sen\ \theta = \frac{C.op.}{Hip} = \frac{distancia}{|\overline{PQ}|}$$

$$Distancia = |\overline{PQ}|(Sen\ \theta)$$

Entonces:

$$Distancia = (\sqrt{64+9+64})(Sen\ 40.3349)$$

$$Distancia = \sqrt{137}(Sen\ 40.3349)$$

$$Distancia = 7.5759\ u$$

…clase distancia perpendicular de un punto a una recta

Nota.-En los casos en que la ecuación de la recta está en forma paramétrica o vectorial, igual se sugiere considerar el punto P_0 como el que se forma con los términos independientes, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3t - 4 \\ y = -5t + 1 \\ z = 2t + 7 \end{array}\right\} \quad Q = P_0(-4, 1, 7)$$

En estos casos no se les cambia el signo porque ya se cambiaron al pasar al segundo término.

Y $\overline{M}$ se forma con los coeficientes de t: $\overline{M} = 3i - 5j + 2k$

De igual manera con la ecuación vectorial:

$$[x, y, z] = [(2t - 1), (-7t + 3), (2t - 5)]$$
$$Q = P_0(-1, 3, -5)$$

Y en estos casos, $\overline{M}$ también se forma con los coeficientes de t: $\overline{M} = 2i - 7j + 2k$

…clase distancia perpendicular de un punto a una recta

Otro ejemplo, ahora considerando que están las ecuaciones simétricas trabajadas en parejas de quebrados:

Obtener la distancia más corta entre el punto P (-2, 4, -7) y la recta:

$$\left.\begin{aligned} 5x-20&=8y+16\\ -3x+12&=8z-8\\ -3y-6&=5z-5 \end{aligned}\right\}$$

Ecuaciones simétricas trabajadas en parejas

1) Primero debemos trabajar y acomodar los quebrados para identificar el vector director de la recta y el punto contenida en ella:

$5x-20=8y+16$ $5(x-4)=8(y+2)$ $\frac{(x-4)}{8}=\frac{(y+2)}{5}$	$-3x+12=8z-8$ $-3(x-4)=8(z-1)$ $\frac{(x-4)}{8}=\frac{(z-1)}{-3}$	$-3y-6=5z-5$ $-3(y+2)=5(z-1)$ $\frac{(y+2)}{5}=\frac{(z-1)}{-3}$

$$\frac{(x-4)}{8}=\frac{(y+2)}{5}=\frac{(z-1)}{-3}$$

De aquí obtenemos el punto Q contenido en la recta:

$$Q(4,-2,1)$$

…clase distancia perpendicular de un punto a una recta

Recordemos que se pueden tomarlos valores de x_0, y_0, z_0, que son los que se restan de x, y, z, respectivamente (considerando el cambio de signo ya que la fórmula nos indican que se restan de x, y, z).

2) Se obtiene el vector PQ

$$\overline{PQ} = (4-(-2))i + (-2-4)j + (1-(-7))k$$

$$\overline{PQ} = 6i - 6j + 8k$$

3) Se identifica entonces en vector $\overline{M}$ con los denominadores de las ecuaciones de la recta:

$$\frac{(x-4)}{8} = \frac{(y+2)}{5} = \frac{(z-1)}{-3}$$

Por tanto: $\overline{M} = 8i + 5j - 3k$

…clase distancia perpendicular de un punto a una recta

4) Se calcula el ángulo entre $\overline{PQ}$ y $\bar{M}$

$$Cos\,\theta = \frac{\overline{PQ}\cdot\bar{M}}{|\overline{PQ}||\bar{M}|} = \frac{(8)(6)+(5)(-6)+(-3)(8)}{\sqrt{36+36+64}\sqrt{64+25+9}}$$

$$Cos\,\theta = \frac{48-30-24}{\sqrt{136}\sqrt{98}} = \frac{-6}{\sqrt{136}\sqrt{98}}$$

$$\theta = 92.9791°$$

5) Ahora se considera el triángulo rectángulo que se forma entre los vectores PQ y M y a partir del triángulo, se obtiene la distancia que es cateto opuesto del triángulo:

$$Distancia = |\overline{PQ}|(Sen\,\theta)$$

$$Distancia = \sqrt{136}(Sen\,92.9791)$$

$$Distancia = 11.6461\,u$$ ✓

…clase distancia perpendicular de un punto a una recta

El mismo ejemplo anterior, pero otra forma de resolverlo:

Obtener la distancia más corta entre el punto P (-2, 4, -7) y la recta:

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 20 = 8y + 16 \\ -3x + 12 = 8z - 8 \\ -3y - 6 = 5z - 5 \end{array}\right\}$$

Ecuaciones simétricas trabajadas en parejas

1) Otra forma de resolver, es dando un valor arbitrario a una (la que sea) de las variables, por ejemplo:

   Si z=0

$$-3x + 12 = 8(0) - 8$$
$$-3x = 0 - 8 - 12$$
$$x = \frac{-20}{-3} = 6.67$$

$$-3y - 6 = 5(0) - 5$$
$$-3y = 0 - 5 + 6$$
$$y = \frac{1}{-3} = -0.33$$

   Entonces

$$Q(6.67, -0.33, 0)$$

…clase distancia perpendicular de un punto a una recta

2) Se obtiene el vector PQ

$$\overline{PQ} = (6.67 - (-2))i + (-0.33 - 4)j + \big(0 - (-7)\big)k$$

$$\overline{PQ} = 8.67i - 4.33j + 7k$$

3) Se trabajan y acomodan los quebrados para identificar el vector director de la recta (Vector $\overline{M}$)

$5x - 20 = 8y + 16$ $5(x-4) = 8(y+2)$ $\dfrac{(x-4)}{8} = \dfrac{(y+2)}{5}$	$-3x + 12 = 8z - 8$ $-3(x-4) = 8(z-1)$ $\dfrac{(x-4)}{8} = \dfrac{(z-1)}{-3}$	$-3y - 6 = 5z - 5$ $-3(y+2) = 5(z-1)$ $\dfrac{(y+2)}{5} = \dfrac{(z-1)}{-3}$

$$\frac{(x-4)}{8} = \frac{(y+2)}{5} = \frac{(z-1)}{-3}$$

Por tanto: $\overline{M} = 8i + 5j - 3k$

…clase distancia perpendicular de un punto a una recta

4) Se calcula el ángulo entre $\overline{PQ}$ y $\overline{M}$

$$Cos\,\theta = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{M}}{|\overline{PQ}||\overline{M}|} = \frac{(8)(8.67) + (5)(-4.33) + (-3)(7)}{\sqrt{75.1689 + 18.7489 + 49}\sqrt{64 + 25 + 9}}$$

$$Cos\,\theta = \frac{69.36 - 21.65 - 21}{\sqrt{142.9178}\sqrt{98}} = \frac{26.71}{\sqrt{142.9178}\sqrt{98}}$$

$$\theta = 76.9563°$$

5) Ahora se considera el triángulo rectángulo que se forma entre los vectores PQ y M y a partir del triángulo, se obteien la distancia que es cateto opuesto del triángulo:

$$Distancia = |\overline{PQ}|(Sen\,\theta)$$

$$Distancia = \sqrt{142.9178}(Sen\ 76.9563)$$

$$Distancia = 11.6463\,u\ ✔$$