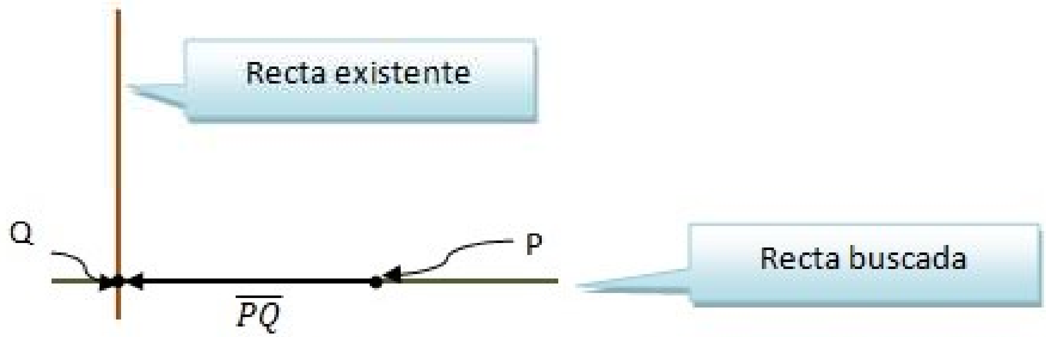
Explicación, ejercicios aplicados Ecuación de la Recta

1. <u>Recta que contiene un punto y es perpendicular a otra recta en su punto de intersección.</u>

Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto P(2,-1, 3) y es perpendicular a la recta $\frac{(x-1)}{3} = \frac{(y-3)}{-5} = \frac{(z+2)}{4}$ en su intersección



Considerando que Po(x_0, y_0, z_0) es P(2, -1, 3), planteamos la ecuación de la recta que buscamos:

$$\frac{(x-2)}{A} = \frac{(y+1)}{B} = \frac{(z-3)}{C} \qquad \text{Ec. 1}$$

Primero debemos considerar que el punto en el que se intersectan, los valores de "x", "y" y "z" valen lo mismo para las dos rectas, con esta consideración, vamos a hacer paramétrica la ecuación de la recta conocida:

$$\frac{(x-1)}{3} = \frac{(y-3)}{-5} = \frac{(z+2)}{4} = t_1$$

…explicación, ejercicios apl. Ec. de la Recta

$\frac{(x-1)}{3}=t_1$ $x-1=3t_1$ $x=3t_1+1$	$\frac{(y-3)}{-5}=t_1$ $y-3=-5t_1$ $y=-5t_1+3$	$\frac{(z+2)}{4}=t_1$ $z+2=4t_1$ $z=4t_1-2$

Ahora sustituimos "x", "y" y "z" en Ec. 1:

$$\frac{[(3t_1+1)-2]}{A}=\frac{[(-5t_1+3)+1]}{B}=\frac{[(4t_1-2)-3]}{C}$$

$$\frac{(3t_1+1-2)}{A}=\frac{(-5t_1+3+1)}{B}=\frac{(4t_1-2-3)}{C}$$

$$\frac{(3t_1-1)}{A}=\frac{(-5t_1+4)}{B}=\frac{(4t_1-5)}{C}$$

Ec. 2

Por otro lado, tenemos que para que las dos rectas sean perpendiculares se debe cumplir que el ángulo entre ellas sea de 90°:

$$Cos90° = \frac{(3)A+(-5)B+(4)C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{9+25+16}}$$

…explicación, ejercicios apl. Ec. de la Recta

Debido a que el Coseno de 90° es cero:

$$0 = \frac{(3)A + (-5)B + (4)C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{9 + 25 + 16}}$$

$$(0)\left(\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{9 + 25 + 16}\right) = 3A - 5B + 4C$$

Y como cero por cualquier número es cero:

$$0 = 3A - 5B + 4C$$

Ec. 3

De la Ec. 2, trabajamos en parejas de quebrados:

$$\frac{(3t_1 - 1)}{A} = \frac{(-5t_1 + 4)}{B}$$

$$B(3t_1 - 1) = A(-5t_1 + 4)$$

$$A = \frac{B(3t_1 - 1)}{(-5t_1 + 4)}$$

Ec. 4

Y de la misma Ec. 2, trabajamos en parejas de quebrados:

$$\frac{(-5t_1 + 4)}{B} = \frac{(4t_1 - 5)}{C}$$

$$C(-5t_1 + 4) = B(4t_1 - 5)$$

$$C = \frac{B(4t_1 - 5)}{(-5t_1 + 4)}$$

Ec. 5

…explicación, ejercicios apl. Ec. de la Recta

Ahora, vamos asustituir Ec. 4 y Ec. 5 en Ec. 3:

$$3\frac{B(3t_1 - 1)}{(-5t_1 + 4)} - 5B + 4\frac{B(4t_1 - 5)}{(-5t_1 + 4)} = 0$$

Tratamos de dejar el mismo denominador para todo:

$$3\frac{B(3t_1 - 1)}{(-5t_1 + 4)} - 5B\frac{(-5t_1 + 4)}{(-5t_1 + 4)} + 4\frac{B(4t_1 - 5)}{(-5t_1 + 4)} = 0$$

Sacamos como denominador común $(-5t_1 + 4)$

$$\frac{[3B(3t_1 - 1) - 5B(-5t_1 + 4) + 4B(4t_1 - 5)]}{(-5t_1 + 4)} = 0$$

Pasamos multiplicando $(-5t_1 + 4)$ por cero, por lo que se hace cero

$$3B(3t_1 - 1) - 5B(-5t_1 + 4) + 4B(4t_1 - 5) = 0$$

Sacamos como término común B:

$$B[3(3t_1 - 1) - 5(-5t_1 + 4) + 4(4t_1 - 5)] = 0$$

…explicación, ejercicios apl. Ec. de la Recta

Pasamos B dividiendo a cero, por lo que se hace cero también:

$$3(3t_1 - 1) - 5(-5t_1 + 4) + 4(4t_1 - 5) = 0$$

Realizamos operaciones:

$$9t_1 - 3 + 25t_1 - 20 + 16t_1 - 20 = 0$$

$$50t_1 - 43 = 0$$

$$t_1 = \frac{43}{50}$$

$$t_1 = 0.86$$

…explicación, ejercicios apl. Ec. de la Recta

Sustituimos t_1 en los despejes de "x", "y" y "z":

$x = 3t_1 + 1$ $x = 3(0.86) + 1$ $x = 3.58$	$y = -5t_1 + 3$ $y = -5(0.86) + 3$ $y = -1.3$	$z = 4t_1 - 2$ $z = 4(0.86) - 2$ $z = 1.44$

Ahora tenemos un punto Q (3.58, -1.3, 1.44) en la recta, que es donde se intersectan ambas rectas, con este punto y P (2, -1, 3), calculamos el vector director $\overline{PQ}$:

$$\overline{PQ} = (3.58 - 2)i + (-1.3 - (-1))j + (1.44 - 3)k$$

$$\overline{PQ} = 1.58i - 0.3j - 1.56k$$

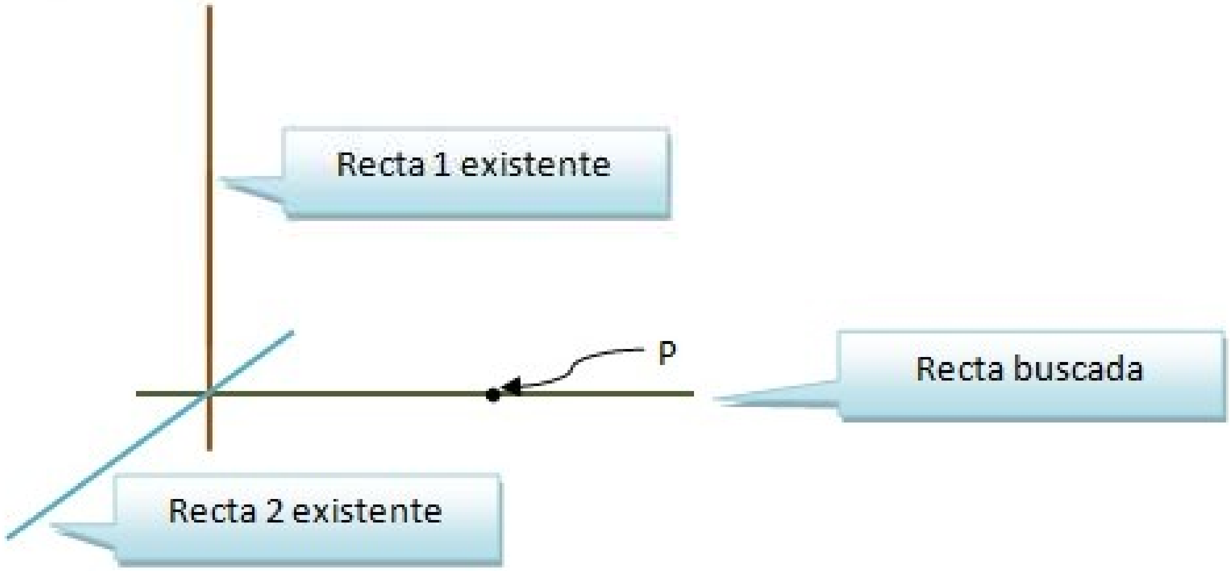
Estos son los números directores de la ecuación de la recta, es decir [A, B C], los que vamos a sustituir en la Ec. 1:

$$\frac{(x-2)}{1.58} = \frac{(y+1)}{-0.3} = \frac{(z-3)}{-1.56} \checkmark$$

…explicación, ejercicios apl. Ec. de la Recta

2. <u>Recta que contiene un punto y es perpendicular a otras dos rectas.</u>

Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto P(4, 2, -1) y es perpendicular a las rectas $\frac{(x-3)}{6} = \frac{(y+4)}{2} = \frac{(z-3)}{-3}$ y $\frac{(x+2)}{7} = \frac{(y+1)}{-4} = \frac{(z-5)}{2}$



Vamos a identificar los números directores de las rectas uno y dos:

$$\bar{M} = [6, 2, -3]$$

$$\bar{N} = [7, -4, 2]$$

…explicación, ejercicios apl. Ec. de la Recta

Para buscar los números directores de la recta buscada, debemos hacer producto cruz con los números directores de las rectas conocidas ($\bar{M}$ y $\bar{N}$)

$$\bar{M}\ X\ \bar{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 2 & -3 \\ 7 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}\ X\ \bar{N} = (2)(2)i + (-3)(7)j + (6)(-4)k - (-4)(-3)i - (6)(2)j - (7)(2)k$$

$$\bar{M}\ X\ \bar{N} = -8i - 33j - 38k$$

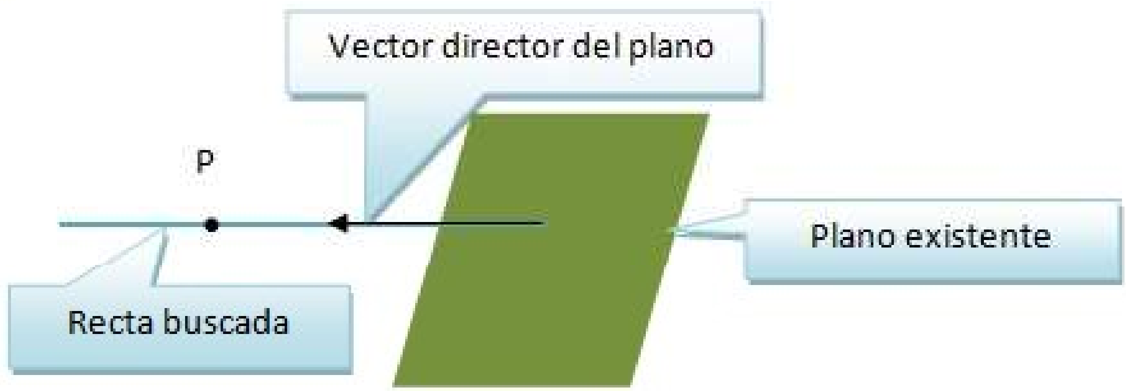
Entonces, éstos serán [A, B, C] para la ecuación de la recta, y el punto contenido en ella será P_0:

$$\frac{(x-4)}{-8} = \frac{(y-2)}{-33} = \frac{(z+1)}{-38} \checkmark$$

…explicación, ejercicios apl. Ec. de la Recta

3. <u>Recta que contiene un punto y es perpendicular a un plano.</u>

Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto P(-7, 3, 5) y es perpendicular al plano $3x + 2y - 4z + 9 = 0$



Vamos a identificar los números directores del plano:

$$\bar{M} = [3, 2, -4]$$

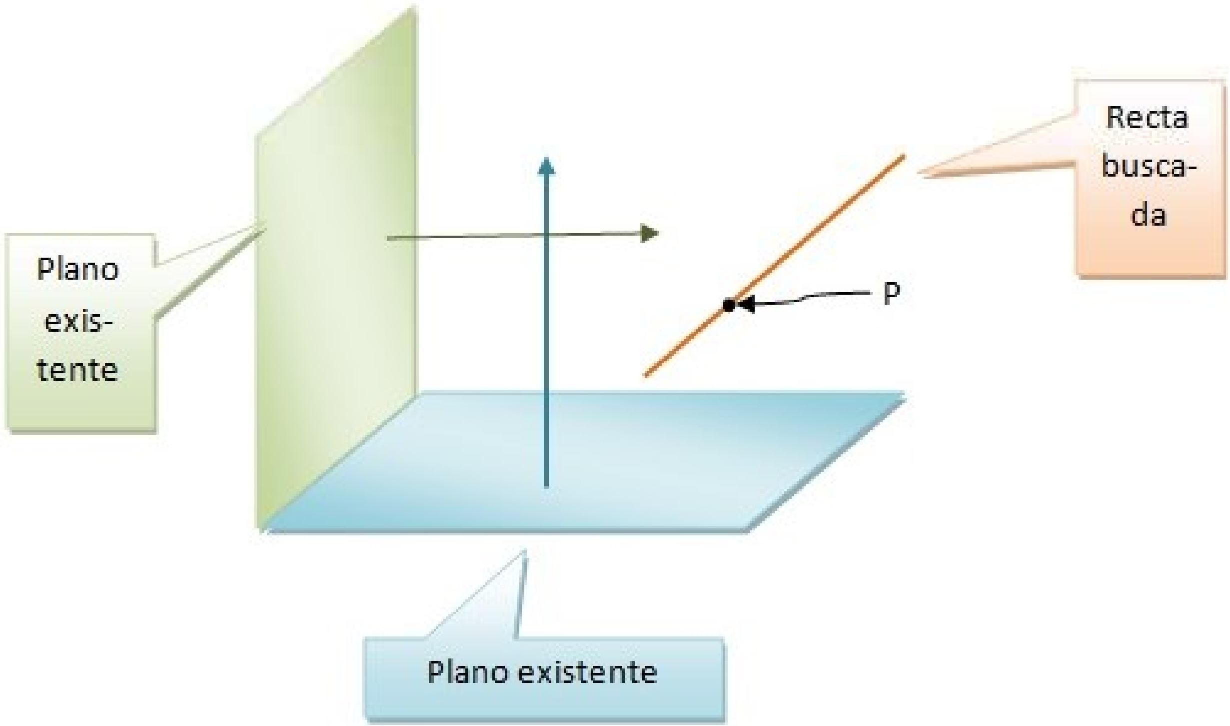
Entonces, éstos serán [A, B, C] para la ecuación de la recta, y el punto P(-7, 3, 5), contenido en ella será $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{(x+7)}{3} = \frac{(y-3)}{2} = \frac{(z-5)}{-4} \checkmark$$

…explicación, ejercicios apl. Ec. de la Recta

4. <u>Recta que contiene un punto y es paralela a dos planos.</u>

Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto P(6, -2, 4) y es paralela a cada uno de los planos $6x - 5y + z + 9 = 0$ y $2x - y + 5z - 12 = 0$



…explicación, ejercicios apl. Ec. de la Recta

Vamos a identificar los números directores de los planos uno y dos:

$$\bar{M} = [6, -5, 1]$$

$$\bar{N} = [2, -1, 5]$$

Para buscar los números directores de la recta buscada, debemos hacer producto cruz con los números directores ($\bar{M}$ y $\bar{N}$) de los planos conocidos:

$$\bar{M}\; X\; \bar{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}\; X\; \bar{N} = (5)(-5)i + (1)(2)j + (6)(-1)k - (-1)(1)i - (6)(5)j - (-5)(2)k$$

$$\bar{M}\; X\; \bar{N} = -24i - 28j + 4k$$

Entonces, éstos serán [A, B, C] para la ecuación de la recta, y el punto P(6, -2, 4), contenido en ella será $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{(x-6)}{-24} = \frac{(y+2)}{-28} = \frac{(z-4)}{4} \checkmark$$