Clase ángulo entre rectas

El ángulo entre dos rectas se obtiene con la fórmula de ángulo entre dos vectores:

$$Cos\theta = \frac{M \cdot N}{|M||N|}$$

Para formulario

De las distintas formas de las ecuaciones de las rectas, los vectores M y N serán:

Ecuaciones simétricas:

$$\frac{(x - x_0)}{A} = \frac{(y - y_0)}{B} = \frac{(z - z_0)}{C}$$

$\bar{M}\ o\ \bar{N} = [A, B, C]$, es decir, los denominadores de cada fracción

Ecuaciones paramétricas:

$$x = At + x_0$$

$$y = Bt + y_0$$

$$z = Ct + z_0$$

$\bar{M}\ o\ \bar{N} = [A, B, C]$, es decir, los coeficientes de "t"

…clase ángulo entre rectas

Ecuaciones vectoriales:

$$[x, y, z] = [(At + x_0), (Bt + y_0), (Ct + z_0)]$$

$\bar{M}$ o $\bar{N}$ $= [A, B, C]$, es decir, los coeficientes de "t"

Ejercicio 1, ángulo entre rectas

Ejemplo 1 de ángulo entre dos rectas:

Hallar el ángulo entre las rectas: Recta uno: $\frac{(x+1)}{2}=\frac{(y+2)}{-4}=\frac{(z-3)}{5}$ y la recta dos: $x=5t+8$, $y=2t-4,\ z=-t+6$

Primero debemos identificar cuáles son los vectores directores de cada recta:

En el caso de la recta uno, el vector director se forma con los denominadores de cada quebrado, por tanto:

$$\bar{M}=2i-4j+5k$$

Para la recta dos, el vector director se forma con los coeficientes de "t", por tanto:

$$\bar{N}=5i+2j-k$$

…ejercicio 1, ángulo entre rectas

Ahora obtendremos el ángulo entre las rectas:

$$Cos\theta = \frac{M \cdot N}{|M||N|}$$

$$Cos\theta = \frac{2(5) + (-4)(2) + (5)(-1)}{(\sqrt{4+16+25})(\sqrt{25+4+1})}$$

$$Cos\theta = \frac{10 - 8 - 5}{(\sqrt{45})(\sqrt{30})}$$

$$Cos\theta = \frac{-3}{(\sqrt{45})(\sqrt{30})}$$

$$\theta = 94.6834°$$ ✔

Ejercicio 2, ángulo entre rectas

Ejemplo 2 de ángulo entre dos rectas:

Hallar el ángulo entre las rectas: Recta uno: $[x, y, z] = [(5t - 4), (-2t - 1), (t + 6)]$ y la recta dos: $x = 3t - 2,\ y = -4t + 8,\ z = 2t + 3$

Primero debemos identificar cuáles son los vectores directores de cada recta:

En cada uno de estos casos, cada vector director se forma con los coeficientes de "t", por tanto:

$$\bar{M} = 5i - 2j + k$$

$$\bar{N} = 3i - 4j + 2k$$

…ejercicio 2, ángulo entre rectas

Ahora obtendremos el ángulo entre las rectas:

$$Cos\theta = \frac{M \cdot N}{|M||N|}$$

$$Cos\theta = \frac{5(3) + (-2)(-4) + (1)(2)}{(\sqrt{25+4+1})(\sqrt{9+16+4})}$$

$$Cos\theta = \frac{15+8+2}{(\sqrt{30})(\sqrt{29})}$$

$$Cos\theta = \frac{25}{(\sqrt{30})(\sqrt{29})}$$

$$\theta = 32.0506° \checkmark$$

Ejercicio 3, ángulo entre rectas

Hallar el ángulo entre las rectas: Recta uno: $\frac{(x-4)}{3} = \frac{(y+3)}{5} = \frac{(z-6)}{-4}$ y la recta dos: $-2x + 2 = 3y + 12, \quad 5y + 20 = -2z + 12, \quad 5x - 5 = 3z - 18$

Primero debemos identificar cuáles son los vectores directores de cada recta:

En el caso de la recta uno, el vector director se forma con los denominadores de cada quebrado, por tanto:

$$\bar{M} = 3i + 5j - 4k$$

Para la recta dos, debemos pasarla a su forma simétrica para identificar el vector director:

$-2x + 2 = 3y + 12$ $-2(x-1) = 3(y+4)$ Entonces $\frac{(x-1)}{3} = \frac{(y+4)}{-2}$	$5y + 20 = -2z + 12$ $5(y+4) = -2(z-6)$ Entonces $\frac{(y+4)}{-2} = \frac{(z-6)}{5}$	$5x - 5 = 3z - 18$ $5(x-1) = 3(z-6)$ Entonces $\frac{(x-1)}{3} = \frac{(z-6)}{5}$

…ejercicio 3, ángulo entre rectas

Por tanto:

$$\bar{N} = 3i - 2j + 5k$$

Ahora obtendremos el ángulo entre las rectas:

$$Cos\theta = \frac{M \cdot N}{|M||N|}$$

$$Cos\theta = \frac{3(3) + (5)(-2) + (-4)(5)}{(\sqrt{9 + 25 + 16})(\sqrt{9 + 4 + 25})}$$

$$Cos\theta = \frac{9 - 10 - 20}{(\sqrt{50})(\sqrt{38})}$$

$$Cos\theta = \frac{-21}{(\sqrt{50})(\sqrt{38})}$$

$$\theta = 118.8013° \checkmark$$