Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Ya conocemos como se identifican las superficies cuadráticas y por otro lado ya dominamos como convertir puntos de coordenadas cartesianas a coordenadas cuadráticas, ahora veamos como pasar las ecuaciones de las superficies expresadas como coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas y esféricas.

Obtenga una ecuación en coordenadas cilíndricas para la superficie $x^2 + y^2 = z$

Teniendo en cuenta, por la forma de la ecuación $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} = \frac{z}{1}$, se trata de un paraboloide elíptico

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*		*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ $c > 0$	plano xy: $z = k > 0$: $z = k < 0$: plano yz: $x = k$: plano xz: $y = k$:	Punto (origen) Elipse Ninguno Parábola Parábola Parábola Parábola		

Mtra. Ma. De los Ángeles Martínez Cosío

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Por otro lado, recordemos que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Entonces de la ecuación:

$$x^2 + y^2 = z$$

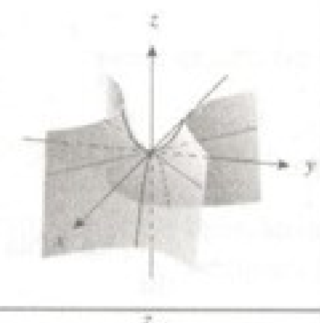
Obtenemos:

$$r^2 = z \checkmark$$

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas cilíndricas para la superficie $x^2 - y^2 = z$

Esta ecuación, por su forma $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = \frac{z}{1}$, representa un Paraboloide hiperbólico

Superficie cuádrica	Trazas en el plano indicado	Gráfica dibujada	Gráfica trazada por medio de Mathematica
Paraboloide hiperbólico $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ $c > 0$	plano xy: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $z = k \neq 0$: Hipérbola plano yz: Parábola $x = k$: Parábola plano xz: Parábola $y = k$: Parábola		

Recordemos que:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Entonces, si substituimos "x" y "y" en $x^2 - y^2 = z$ tendremos

$$(r\ cos\theta)^2 - (r\ sen\theta)^2 = z$$

$$r^2 cos^2\theta - r^2 sen^2\theta = z$$

$$r^2(cos^2\theta - sen^2\theta) = z$$

Recordemos la identidad trigonométrica:

$$\boxed{Cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta}$$

Aplicando la identidad trigonométrica anterior, tendremos:

$$r^2 \cos 2\theta = z \checkmark$$

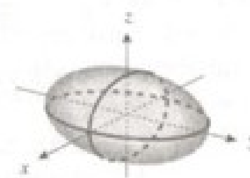
Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas cilíndricas para la superficie $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$

Si dividimos todo por el término independiente: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{4z^2}{16} = \frac{16}{16}$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Esta ecuación, por su forma $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$, representa un Elipsoide

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	plano xy: Elipse $z = \lvert k \rvert < c$: Elipse plano yz: Elipse $x = \lvert k \rvert < c$: Elipse plano xz: Elipse $y = \lvert k \rvert < c$: Elipse		

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Si consideramos que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Entonces, la ecuación $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ quedaría

$$r^2 + 4z^2 = 16 \checkmark$$

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie que se representa en coordenadas cilíndricas como $r^2 - 3z^2 = 0$

Si consideramos que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Tendremos:

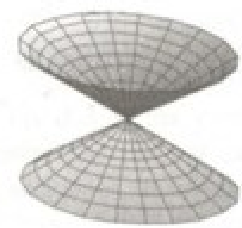
$$x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$$

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Para poder identificar la superficie, debemos dividir todo por el coeficiente de z, para dejar a z con coeficiente unitario, tendremos:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{1}=0$$

Esta ecuación, por su forma $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{1}=0$, representa un Cono elíptico

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Cono elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	plano xy: Punto (origen) $z=k\neq 0$: Elipse plano yz: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $x=k\neq 0$: Hipérbola plano xz: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $y=k\neq 0$: Hipérbola		

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie que se representa en coordenadas cilíndricas como $r^2 - 9z^2 = 36$

Si consideramos que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Tendremos:

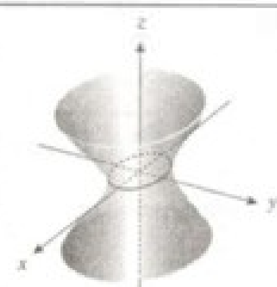
$$x^2 + y^2 - 9z^2 = 36$$

Para poder identificar la superficie, debemos dividir todo por el término independiente:
$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{36} - \frac{9z^2}{36} = \frac{36}{36}$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{4} = 1$$

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Esta ecuación, por su forma $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{4}=1$, representa un Hiperboloide elíptico de una hoja

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Hiperboloide elíptico de una hoja $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	plano xy: Elipse $z=k$: Elipse plano yz: Hipérbola $x=k$: Hipérbola plano xz: Hipérbola $y=k$: Hipérbola		

Mtra. Ma. De los Ángeles Martínez Cosío

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas la superficie que se representa en coordenadas cilíndricas como $r^2 \cos 2\theta - 4z^2 = 100$

Recordemos la identidad trigonométrica:

$$\boxed{Cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta}$$

Aplicando la identidad trigonométrica anterior, tendremos:

$$r^2(cos^2\theta - sen^2\theta) - 4z^2 = 100$$

$$r^2cos^2\theta - r^2sen^2\theta - 4z^2 = 100$$

$$(r\ cos\theta)^2 - (r\ sen\theta)^2 - 4z^2 = 100$$

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Recordemos que:

$$x = r\,cos\,\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Entonces, si substituimos "x" y "y" en $(r\,cos\theta)^2 - (r\,sen\theta)^2 - 4z^2 = 100$ tendremos

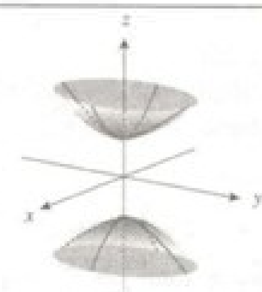
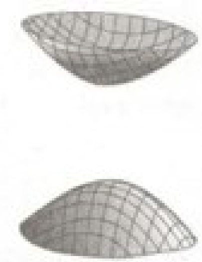
$$x^2 - y^2 - 4z^2 = 100$$

Para identificar la superficie debemos dividir todo por el término independiente: $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{100} - \frac{4z^2}{100} = \frac{100}{100}$

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{100} - \frac{z^2}{25} = 1$$

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Esta ecuación, por su forma $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{100}-\frac{z^2}{25}=1$, representa un Hiperboloide elíptico de dos hojas

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Hiperboloide elíptico de dos hojas $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	plano xy: Ninguna $z=\lvert k\rvert<c$: Ninguna $z=\lvert k\rvert>c$: Elipse plano yz: Hipérbola $x=k$: Hipérbola plano xz: Hipérbola $y=k$: Hipérbola		

Mtra. Ma. De los Ángeles Martínez Cosío

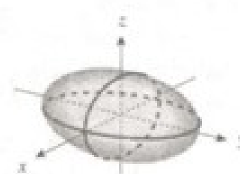
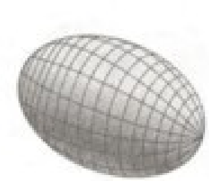
Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas cilíndricas para la superficie $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$

Si dividimos todo por el término independiente: $\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} + \frac{z^2}{36} = \frac{36}{36}$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$$

Esta ecuación, por su forma $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$, representa un Elipsoide

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	plano xy: Elipse $z = \lvert k \rvert < c$: Elipse plano yz: Elipse $x = \lvert k \rvert < c$: Elipse plano xz: Elipse $y = \lvert k \rvert < c$: Elipse		

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Recordemos que:

$$x = r\ cos\ \theta$$

$$y = r\ \mathrm{sen}\,\theta$$

Entonces, si substituimos "x" y "y" en $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$ tendremos

$$4(r\ cos\theta)^2 + 9(r\ sen\theta)^2 + z^2 = 36$$

$$4r^2cos^2\theta + 9r^2sen^2\theta + z^2 = 36 \checkmark$$

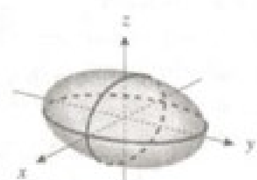
Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie $25x^2 + y^2 + 4z^2 = 100$ que está expresada en coordenadas cartesianas e identifique la superficie

Para identificar la superficie, debemos dividir todo por el término independiente $\frac{25x^2}{100} + \frac{y^2}{100} + \frac{4z^2}{100} = \frac{100}{100}$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{25} = 1$$

Esta ecuación, por su forma $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{25} = 1$, representa un Elipsoide

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*		*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	plano xy: $z = \|k\| < c$: plano yz: $x = \|k\| < c$: plano xz: $y = \|k\| < c$:	Elipse Elipse Elipse Elipse Elipse Elipse		

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Recordemos que:

$$x = r\ (sen\varphi)\ (cos\ \theta)$$

$$y = r\ (sen\varphi)\ (\text{sen}\ \theta)$$

Entonces, si substituimos "x" y "y" en $25x^2 + y^2 + 4z^2 = 100$ tendremos

$$25(r\ sen\ \varphi\ cos\theta)^2 + (r\ sen\ \varphi\ \ sen\theta)^2 + 4z^2 = 100$$

$$r^2 sen^2\ \varphi\ (25\ cos^2\theta + sen^2\theta) + 4z^2 = 100$$ ✓

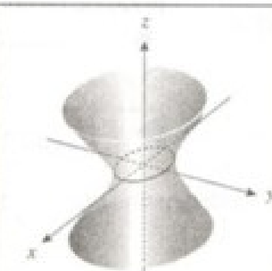
Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie $x^2 + 4y^2 - 16z^2 = 16$ que está expresada en coordenadas cartesianas e identifique la superficie

Para identificar la superficie, debemos dividir todo por el término independiente $\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} - \frac{16z^2}{16} = \frac{16}{16}$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$$

Esta ecuación, por su forma $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$, representa un Hiperboloide elíptico de una hoja

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*		*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Hiperboloide elíptico de una hoja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	plano xy: $z = k$: plano yz: $x = k$ plano xz: $y = k$:	Elipse Elipse Hipérbola Hipérbola Hipérbola Hipérbola		

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Recordemos que:

$$x = r\ (sen\varphi)\ (cos\ \theta)$$

$$y = r\ (sen\varphi)\ (\text{sen}\ \theta)$$

Entonces, si substituimos "x" y "y" en $x^2 + 4y^2 - 16z^2 = 16$ tendremos

$$(r\ sen\ \varphi\ cos\theta)^2 + 4(r\ sen\ \varphi\ \ sen\theta)^2 - 16\ z^2 = 16$$

$$r^2 sen^2\ \varphi\ (\ cos^2\theta + 4sen^2\ \theta) - 16z^2 = 16\ ✓$$

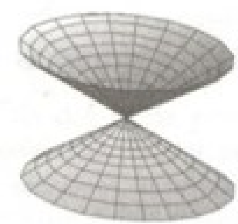
Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie $x^2 + 16y^2 - 4z^2 = 0$ que está expresada en coordenadas cartesianas e identifique la superficie

Para identificar la superficie, debemos dividir todo por coeficiente de y, ya que es el valor mayor de los tres coeficientes $\frac{x^2}{16} + \frac{16y^2}{16} - \frac{4z^2}{16} = 0$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 0$$

Esta ecuación, por su forma $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 0$, representa un Cono elíptico

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Cono elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	plano xy: Punto (origen) $z = k \neq 0$: Elipse plano yz: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $x = k \neq 0$: Hipérbola plano xz: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $y = k \neq 0$: Hipérbola		

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Recordemos que:

$$x = r\ (sen\varphi)\ (cos\,\theta)$$

$$y = r\ (sen\varphi)\,(\mathrm{sen}\,\theta)$$

Entonces, si substituimos "x" y "y" en $x^2 + 16y^2 - 4z^2 = 0$ tendremos

$$(r\ sen\ \varphi\ cos\theta)^2 + 16\ (r\ sen\ \varphi\ \ sen\theta)^2 - 4\ z^2 = 0$$

$$r^2 sen^2\ \varphi\ (\ cos^2\theta + 16sen^2\theta) - 4z^2 = 0 \checkmark$$

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie $r\ sen\ \varphi\ (5r\ sen\varphi\ cos^2\ \theta - 3\ sen\ \theta) = 2z^2$ que está expresada en coordenadas esféricas e identifique la superficie

Recordemos que:

$$x = r\ (sen\varphi)\ (cos\ \theta)$$

$$y = r\ (sen\varphi)\ (\text{sen}\ \theta)$$

Entonces, si substituimos "x" y "y" en $r\ sen\ \varphi\ (5r\ sen\varphi\ cos^2\ \theta - 3\ sen\ \theta) = 2z^2$ tendremos

$$5r^2 sen^2\varphi\ \ cos^2\theta - 3r\ sen\varphi\ sen\theta - 2\ z^2 = 0$$

$$5(r^2 sen^2\varphi\ cos^2\theta) - 3(r\ sen\varphi\ sen\theta)\ - 2z^2 = 0$$

$$5\ x^2 - 3y - 2z^2 = 0$$

Dejaremos el término que no está elevado al cuadrado en el segundo miembro

$$5\ x^2 - 2z^2 = 3y\ \checkmark$$

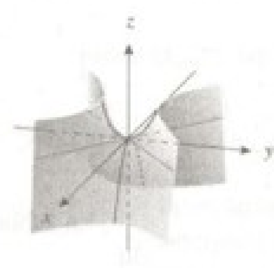
Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Para identificar la superficie, debemos dividir todo por coeficiente de x, ya que es el valor mayor de los tres coeficientes $\frac{5x^2}{5}-\frac{2z^2}{5}=\frac{3y}{5}$

Dejaremos los numeradores con coeficiente unitario

$$\frac{x^2}{1}-\frac{z^2}{5/2}=\frac{y}{5/3}$$

Esta ecuación, por su forma $\frac{x^2}{1}-\frac{z^2}{5/2}=\frac{y}{5/3}$, representa un Paraboloide hiperbólico

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Paraboloide hiperbólico $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$ $c>0$	plano xy: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $z = k \neq 0$: Hipérbola plano yz: Parábola $x = k$: Parábola plano xz: Parábola $y = k$: Parábola		

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie $r^2\ sen^2\ \varphi\ (25\ cos^2\ \theta - 4\ sen^2\ \theta) - z^2 = 100$ que está expresada en coordenadas esféricas e identifique la superficie

Recordemos que:

$$x = r\ (sen\varphi)\ (cos\ \theta)$$

$$y = r\ (sen\varphi)\ (\text{sen}\ \theta)$$

Entonces, si substituimos "x" y "y" en $r^2\ sen^2\ \varphi\ (25\ cos^2\ \theta - 4\ sen^2\ \theta) - z^2 = 100$ tendremos

$$25r^2 sen^2\varphi\ \ cos^2\theta - 4r^2\ sen^2\varphi\ sen^2\theta - \ z^2 = 100$$

$$25(r^2 sen^2\varphi\ cos^2\theta) - 4(r^2\ sen^2\varphi\ sen^2\theta) - z^2 = 100$$

$$25\ x^2 - 4y^2 - z^2 = 100 \checkmark$$

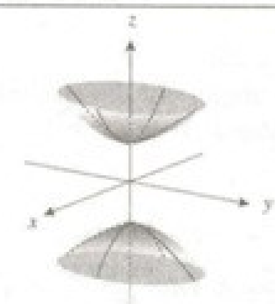
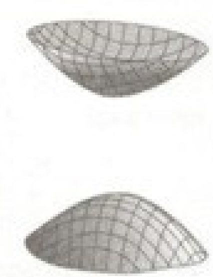
Para identificar la superficie, debemos dividir todo por el término independiente $\frac{25x^2}{100} - \frac{4y^2}{100} - \frac{z^2}{100} = \frac{100}{100}$

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Tendremos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = 1$$

Esta ecuación, por su forma $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = 1$, representa un Hiperboloide elíptico de dos hojas

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*		*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Hiperboloide elíptico de dos hojas $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	plano xy: $z = \lvert k \rvert < c$: $z = \lvert k \rvert > c$: plano yz: $x = k$: plano xz: $y = k$:	Ninguna Ninguna Elipse Hipérbola Hipérbola Hipérbola Hipérbola		

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie $3r\ sen\ \varphi\ (r\ sen\ \varphi\ sen^2\ \theta - 2\ cos\ \theta) = -7z^2$ que está expresada en coordenadas esféricas e identifique la superficie

$$3r\ sen\ \varphi\ (r\ sen\ \varphi\ sen^2\ \theta - 2\ cos\ \theta) = -7z^2$$

$$3r^2\ sen^2\ \varphi\ \ sen^2\ \theta - 6\ r\ sen\ \varphi\ cos\ \theta = -7z^2$$

Recordemos que:

$$x = r\ (sen\varphi)\ (cos\ \theta)$$

$$y = r\ (sen\varphi)\ (\text{sen}\ \theta)$$

Entonces, si substituimos "x" y "y" en $3r^2\ sen^2\ \varphi\ \ sen^2\ \theta - 6\ r\ sen\ \varphi\ cos\ \theta = -7z^2$ tendremos

$$3(r\ sen\varphi\ sen\ \theta)^2 - 6\ (r\ sen\ \varphi\ cos\ \theta) = -7z^2$$

$$3y^2 - 6x + 7z^2 = 0$$

Acomodando el término que no está elevado al cuadrado en el segundo miembro

$$3y^2 + 7z^2 = 6x$$

Clase representación de superficies con ecuaciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

Para identificar la superficie, debemos dividir todo por el coeficiente de z, que es el de mayor valor de los tres $\frac{3y^2}{7} + \frac{7z^2}{7} = \frac{6x}{7}$

Tendremos

$$\frac{y^2}{7/3} + \frac{z^2}{1} = \frac{x}{7/6}$$

Esta ecuación, por su forma $\frac{y^2}{7/3} + \frac{z^2}{1} = \frac{x}{7/6}$, representa un Paraboloide elíptico

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*		*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ $c > 0$	plano xy: $z = k > 0$: $z = k < 0$: plano yz: $x = k$: plano xz: $y = k$:	Punto (origen) Elipse Ninguno Parábola Parábola Parábola Parábola