Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

Vamos a recordar un poco sobre **coordenadas cartesianas** o **coordenadas rectangulares** que es el sistema de coordenadas que más comúnmente utilizamos, iniciamos conociendo un sistema de dos dimensiones, llamado plano cartesiano, en el que representamos dos de los ejes coordenados como rectas y el punto en el que se corten es el origen. Para el eje horizontal o eje x, la parte positiva parte del origen y es el segmento de recta que va hacia la derecha (viéndolo de frente) y la parte negativa parte del origen y es el segmento de recta que va hacia la izquierda (viéndolo de frente); en cuanto al eje y, la parte positiva se considera partiendo del origen hacia arriba y la parte negativa es partiendo del origen hacia abajo.

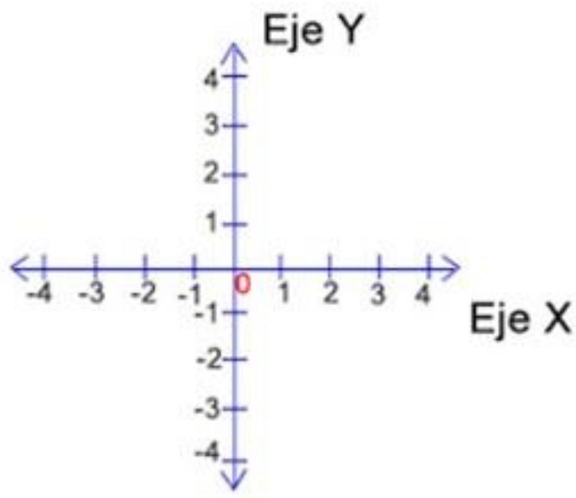


Foto tomada de portaleducativo.net

Mtra. Ma. De los Ángeles Martínez Cosío

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Podemos en este sistema identificar algún punto mediante dos coordenadas, siempre representadas primero la coordenada en el eje x (positivo o negativo) y después la coordenada en el eje y

En este sistema bidimensional se identifican cuatro cuadrantes.

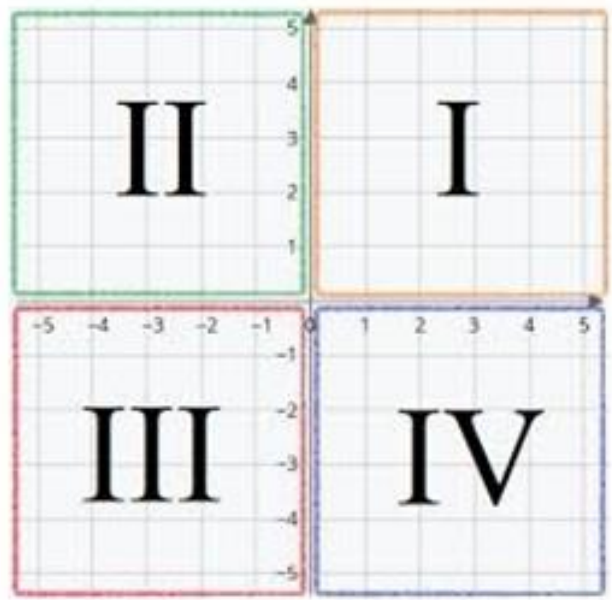


Foto tomada de smartick.es

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Podremos tener tres dimensiones representadas por tres rectas perpendiculares entre sí (x, y, z), que se cortan en un punto al que llamamos origen

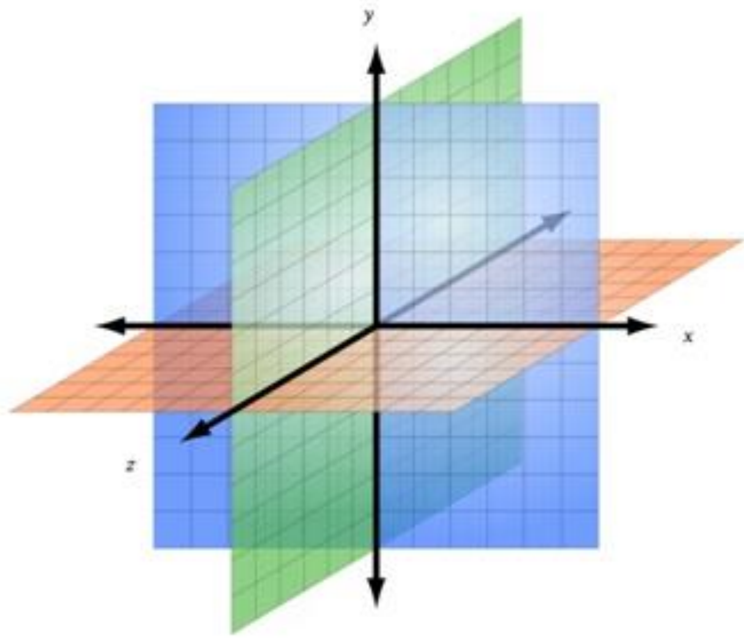


Foto tomada de wikipedia.org

Es decir, al plano cartesiano de dos dimensiones, le añadimos un eje más; el eje z será positivo a partir del origen hacia el frente y a partir del origen hacia atrás será negativo. Y tendremos ocho octantes, en lugar de nuestros cuatro cuadrantes.

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Después de recordar lo relacionado a las coordenadas cartesianas, veamos ahora las **coordenadas polares**, este sistema es un sistema bidimensional en el que se representan puntos en el plano a partir de un radio y un ángulo, el radio es la distancia del origen al punto que se está localizando, y un ángulo de inclinación del radio, contado a partir de la parte positiva del eje x, es decir (r, θ).

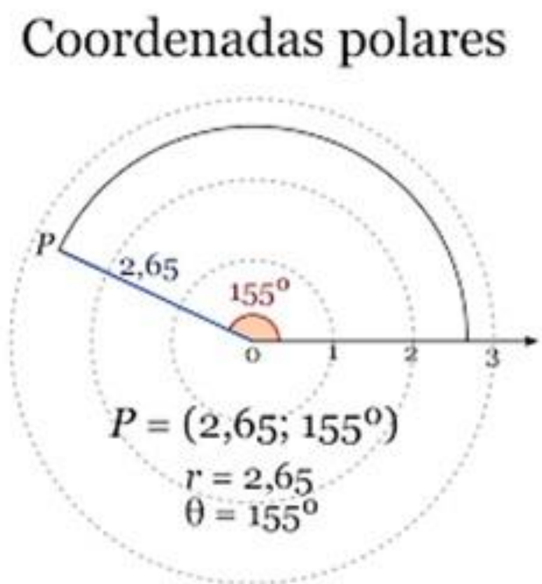


Foto tomada de wikipedia.org

Los ángulos para estas coordenadas se expresan en radianes.

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Para *convertir una coordenada polar a cartesiana*, debemos hacer lo siguiente:

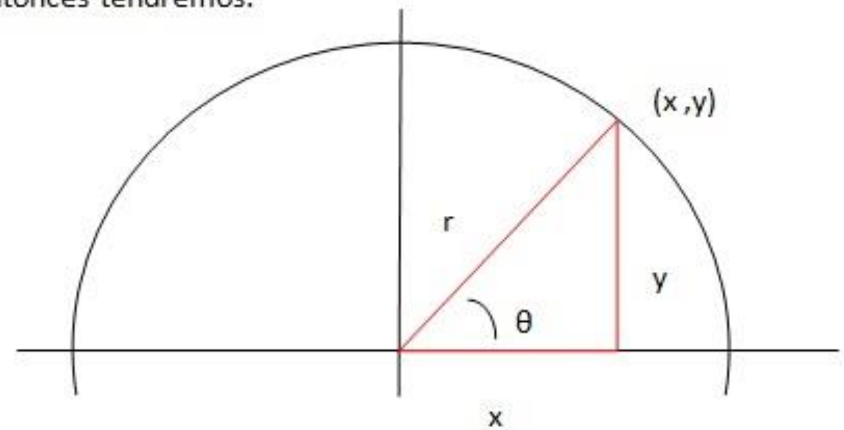
- Convierte las coordenadas polares siguientes a coordenadas cartesianas: A $(3, \pi/4)$, B $(4, 5\pi/3)$ y C $(2, 2\pi)$

Recordemos:

grados	radianes
0	0
90	$\pi/2$
180	π
270	$3\pi/2$
360	2π

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Entonces tendremos:



Del triángulo rectángulo anterior tenemos que:

$$x = r\,cos\,\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Para formulario

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Entonces, en el caso de A (3, π/4), quedaría:

$$x = 3\ \left(cos\frac{\pi}{4}\right) = 3\left[cos\left(\frac{180}{4}\right)\right] = 2.1213$$

$$y = 3\ \left(sen\frac{\pi}{4}\right) = 3\left[sen\left(\frac{180}{4}\right)\right] = 2.1213$$

$$A\ (2.1213, 2.1213)\ \checkmark$$

Para el caso del punto B (4, 5π/3):

$$x = 4\ \left(cos\,\frac{5\pi}{3}\right) = 4\left[cos\left(\frac{5(180)}{3}\right)\right] = 2$$

$$y = 4\ \left(sen\,\frac{5\pi}{3}\right) = 4\left[sen\left(\frac{5(180)}{3}\right)\right] = -3.4641$$

$$B\ (2,\ -3.4641)\ \checkmark$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Finalmente, para el caso del punto C (2, 2π)

$$x = 2\ (cos\ 2\pi) = 2[cos(2(180))] = 2$$

$$y = 2\ (\text{sen}\ 2\pi) = 2[sen(2(180))] = 0$$

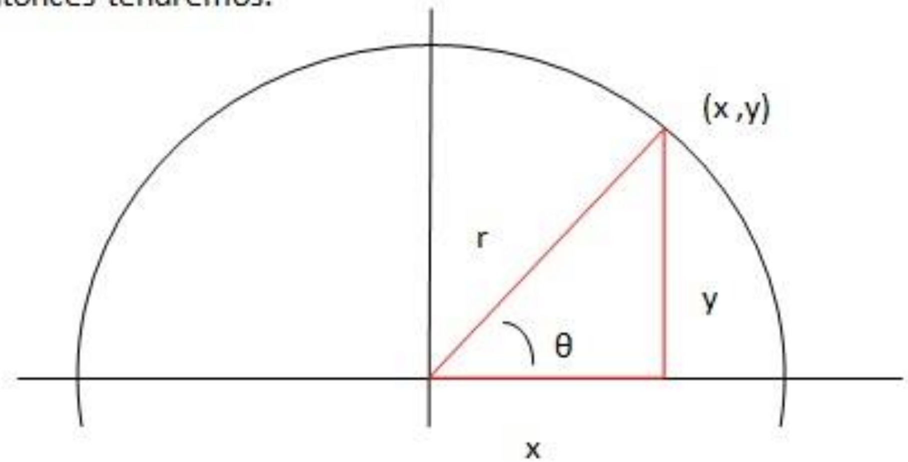
$$C\ (2,0)\ ✓$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Vamos ahora a convertir una *coordenada cartesiana* a *coordenada polar*:

- Convierte las coordenadas cartesianas siguientes a coordenadas polares: D (4, -5), E (-3, 6) y F (6,-2)

Entonces tendremos:



Del triángulo rectángulo anterior tendremos que:

$$x = r\ cos\ \theta$$

$$y = r\ \mathrm{sen}\,\theta$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Y recordemos que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Para formulario

Entonces, en el caso de D (4, -5), debemos obtener primero el radio r:

$$r^2 = 4^2 + (-5)^2$$

$$r = 6.4031$$

Y después el ángulo θ

$$\theta = arccos\frac{x}{r}$$

$$\theta = arccos\frac{4}{6.4031}$$

$$\theta = 51.3400° = 0.2852\pi\ radianes$$

Dividimos el ángulo θ entre 180 para convertir a π radianes

En este caso, el punto D queda como

$$D(6.4031, 0.2852\pi)$$ ✓

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Para el punto E (-3, 6) quedaría:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 6.7082$$

$$\theta = arccos\frac{-3}{6.7082} = 116.5650°$$

$$\theta = 116.5650° = 0.6476\ \pi\ radianes$$

El punto E queda como:

$$E(6.7082, 0.6476\pi)\ \checkmark$$

Entonces, en el caso de F (6, -2), quedaría:

$$r = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 6.3245$$

$$\theta = arccos\frac{6}{6.3245} = 18.4334° = 0.1024\pi\ radianes$$

$$F(6.3245, 0.1024\pi)\ \checkmark$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Bien, ahora veamos las **coordenadas cilíndricas**; estas coordenadas se utilizan para ubicar en el espacio partículas que involucren figuras simétricas. Un punto con coordenadas cilíndricas se representa por (r, θ, z)

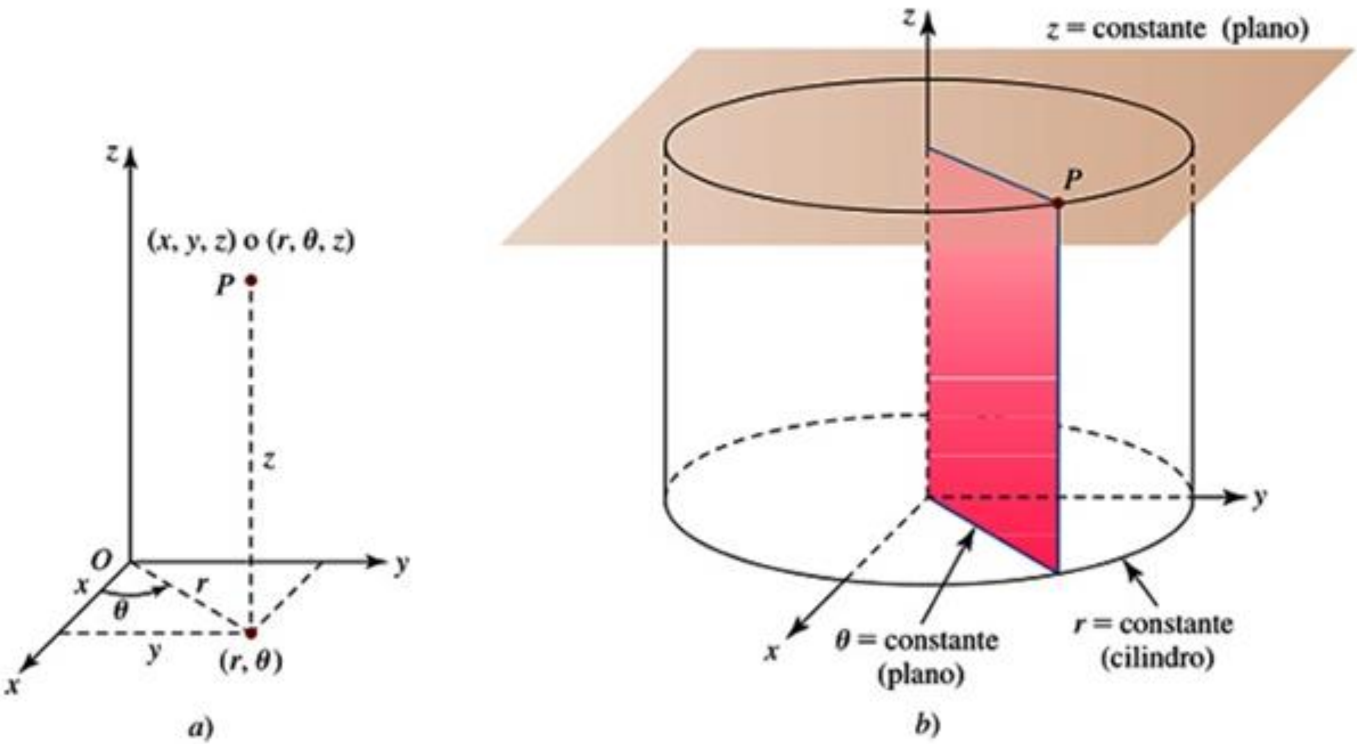


Imagen tomada de http://clasesdcm.blogspot.com/p/coordenadas-polares-cilindricas-y.html

Nota.- observar que en este gráfico vemos los ejes girados

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Esta representación (r, θ, z) es similar a las coordenadas polares, sólo le añadimos la coordenada z

- Convierte las *coordenadas cilíndricas* siguientes a *coordenadas cartesianas*: G (4, π/3, 5), H (-2, 2π/3, 7), I (3, π/2, -9)

En el caso de G (4, π/3, 5), quedaría:

$$x = 4\left(cos\frac{\pi}{3}\right) = 4\left[cos\left(\frac{180}{3}\right)\right] = 2$$

$$y = 4\left(sen\frac{\pi}{3}\right) = 4\left[sen\left(\frac{180}{3}\right)\right] = 3.4641$$

$$G\ (2, 3.4641, 5)\ ✔$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Para H (-2, 2π/3, 7), quedaría:

$$x = -2\left(cos\,\frac{2\pi}{3}\right) = -2\left[cos\left(\frac{2(180)}{3}\right)\right] = 1$$

$$y = -2\left(sen\,\frac{2\pi}{3}\right) = -2\left[sen\left(\frac{2(180)}{3}\right)\right] = -1.7320$$

$$H\ (1, -1.7320, 7)\ ✓$$

Finalmente, I (3, π/2, -9), quedaría:

$$x = 3\left(cos\,\frac{\pi}{2}\right) = 3\left[cos\left(\frac{180}{2}\right)\right] = 0$$

$$y = 3\left(sen\,\frac{\pi}{2}\right) = 3\left[sen\left(\frac{180}{2}\right)\right] = 3$$

$$I\ (0, 3, -9)\ ✓$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Ahora vamos a convertir las *coordenadas cartesianas* a *coordenadas cilíndricas*, esto se hace similar a la conversión a coordenadas polares, pero añadiendo la coordenada de z

- Convierte las *coordenadas cartesianas* siguientes a *coordenadas cilíndricas*: J (10, 7, 2), K (-4, 2, -6) y L (5, -1, 3)

Para el punto J (10, 7, 2) quedaría:

$$r = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149} = 12.2065$$

$$\theta = arccos\,\frac{10}{12.2065} = 34.9916° = 0.1944\,\pi\; radianes$$

El punto J queda:

$$J(12.2065, 0.1944\pi, 2)\ \checkmark$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Convirtiendo el punto K (-4, 2, -6) quedaría:

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4.4721$$

$$\theta = arccos\,\frac{-4}{4.4721} = 153.4359°$$

$$\theta = 153.4359° = 0.8524\,\pi\ radianes$$

Tendríamos, para el punto K:

$$K(4.4721, 0.8524\pi, -6) \checkmark$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

En el caso del punto L (5, -1, 3), éste quedaría:

$$r = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} = 5.0990$$

$$\theta = arccos\,\frac{5}{5.0990} = 11.3088° = 0.0628\,\pi\ radianes$$

El punto L quedaría:

$$L(5.0990, 0.0628\pi, 3)\ ✓$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Ahora veamos cómo son las **coordenadas esféricas**, se trata de que cuando queremos representar la ubicación de una partícula que se mueve sobre una superficie esférica, utilizamos las coordenadas esféricas, evidentemente, será una representación en tres dimensiones, en este caso se representan por (r, θ, φ):

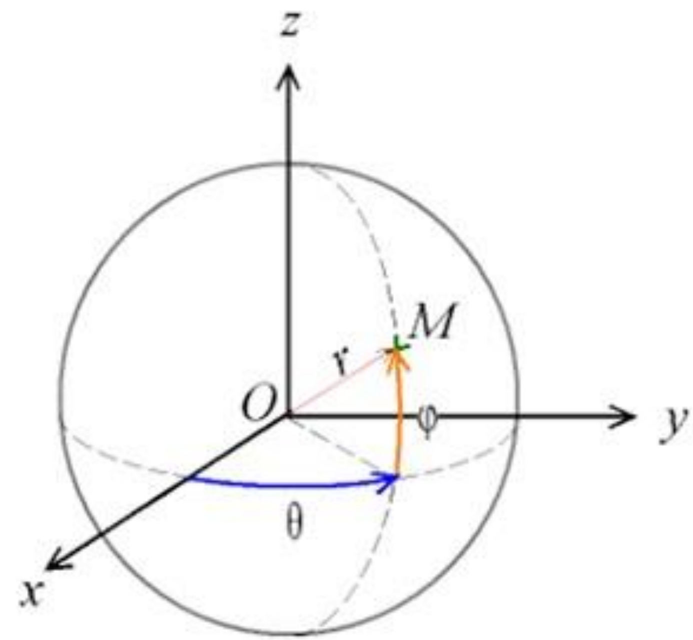


Imagen tomada de yepezcinthya.blogspot.com

Nota.- φ es la letra griega “fi”, la usaremos para representar el ángulo de inclinación del radio r

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

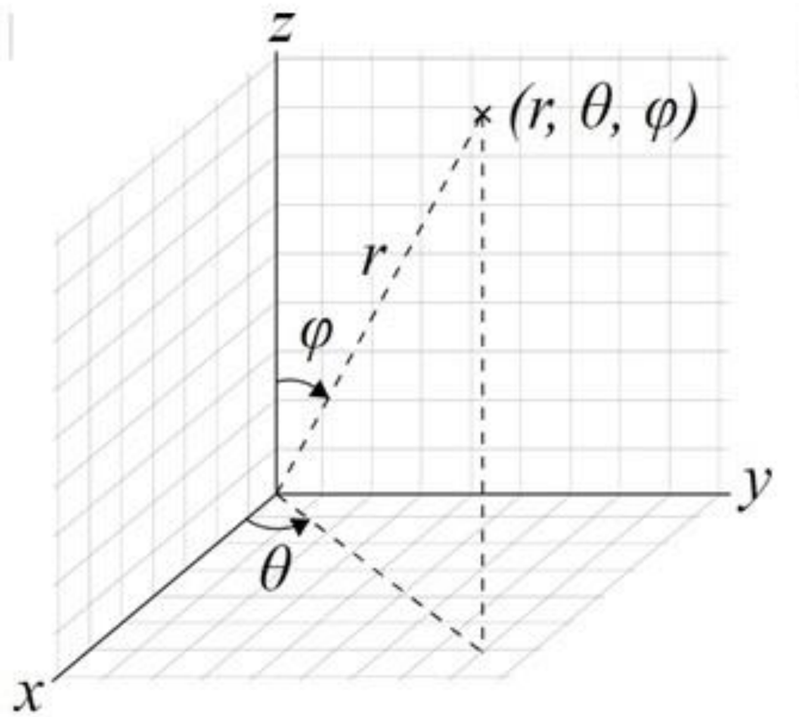


Imagen tomada de es.khanacademy.org

Nota.- observar que en este último gráfico vemos los ejes girados

Los primeros dos elementos de la representación de un punto con las coordenadas esféricas (r, θ, φ) son los mismos que para las coordenadas polares (r, θ), pero ahora añadiremos el ángulo φ), que también se expresará en radianes.

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

- Convierte a *coordenadas esféricas* los puntos siguientes que están en *coordenadas cartesianas* M (2, 3, 5), N (1, -4, -2), P (-6, 2, 7)

Para el punto M, vamos a analizar:

Recordemos que el radio de una esfera se calcula:

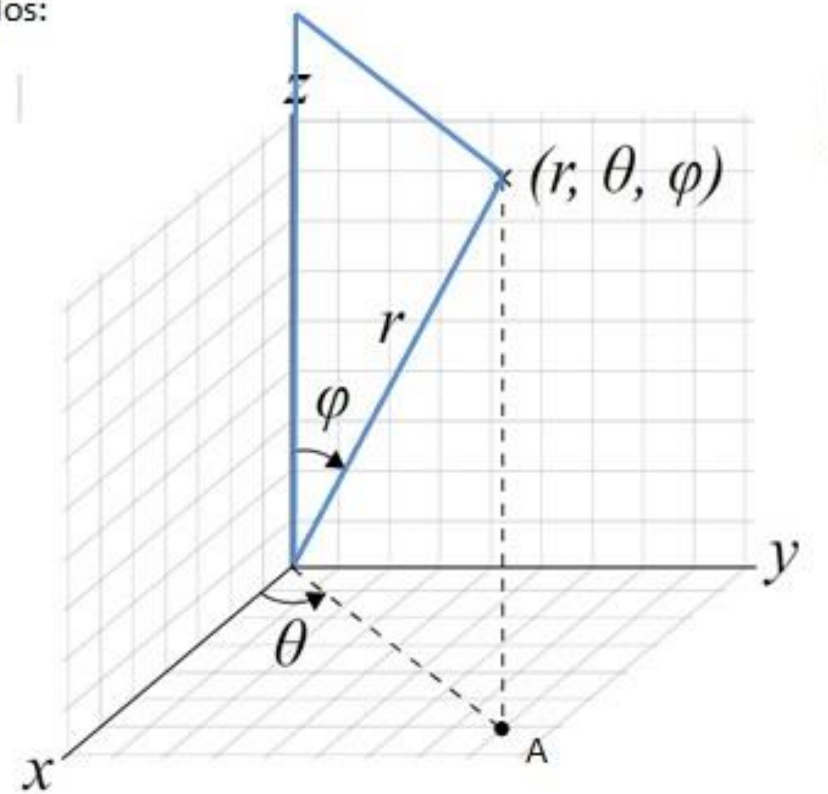
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Entonces, para nuestro caso tendremos:

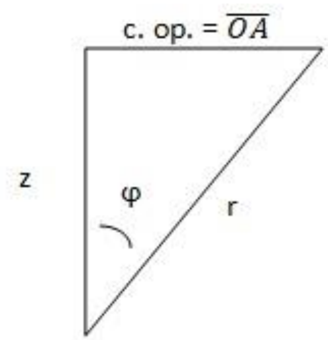
$$r = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38} \checkmark$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Y para los otros ángulos:



…coord. polares, cilíndricas y esféricas



De aquí sabemos que:

$$\cos\varphi = \frac{z}{r}$$

$$sen\ \varphi = \frac{\overline{OA}}{r}$$

Por tanto:

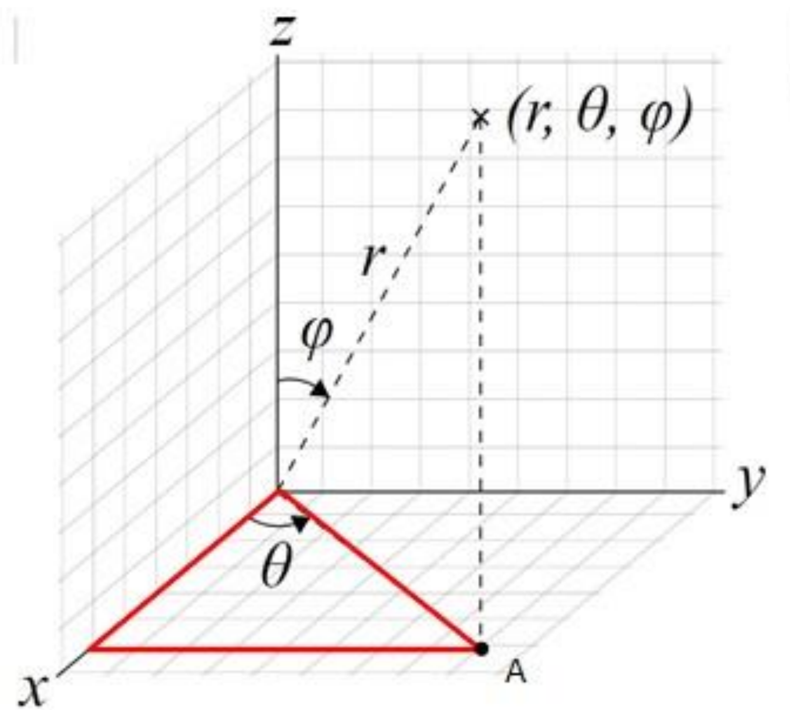
$$z = r\ cos\varphi$$

$$\overline{OA} = r\ sen\varphi$$

Para formulario

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

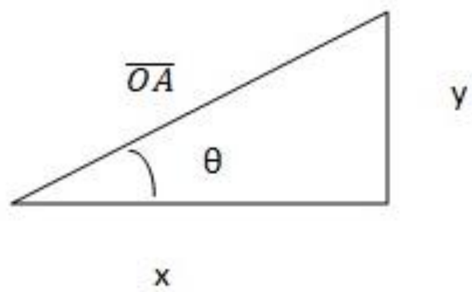
Del otro triángulo observemos



Del triángulo que se forma en el plano xy (el "piso" del octante) podemos verlo mejor en la figura siguiente:

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Del triángulo que se forma en el plano xy (el “piso” del octante) podemos verlo mejor en la figura siguiente:



De este triángulo rectángulo tenemos que:

$$x = \overline{OA}\, cos\, \theta$$

$$y = \overline{OA}\, \mathrm{sen}\, \theta$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Y si sustituimos el vector $\overline{OA}$ por r sen φ

$$\left.\begin{aligned} x &= r\ (sen\varphi)\ (cos\,\theta) \\ y &= r\ (sen\varphi)\,(\text{sen}\,\theta) \end{aligned}\right\}$$

Para formulario

Aplicando al punto M que estamos buscando:

$$z = r\ cos\varphi$$

$$5 = \sqrt{38}\ cos\varphi$$

$$\varphi = arc\ \cos\frac{5}{\sqrt{38}} = 35.7957° = 0.1989\pi\ radianes$$ ✔

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Y el ángulo θ lo obtenemos con:

$$x = r\ (sen\varphi)\ (cos\ \theta)$$

$$2 = \sqrt{38}\ (sen35.7957)\ (cos\ \theta)$$

$$\theta = arc\ cos\frac{2}{\sqrt{38}(sen35.7957)} = 56.3099° = 0.3128\pi\ radianes$$ ✓

Entonces, las coordenadas esféricas de M (2, 3, 5) son

$$M(\sqrt{38}, 0.3128\pi, 0.1989\pi)$$ ✓

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Veamos ahora el siguiente punto N (1, -4, -2)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

$$\varphi = arc\cos\frac{z}{r}$$

$$\varphi = arc\cos\frac{-2}{\sqrt{21}} = 115.8767° = 0.6438\pi\ radianes$$

$$\theta = \text{arc}\cos\frac{x}{r(sen\varphi)}$$

$$\theta = arc\ cos\frac{1}{\sqrt{21}(sen\ 115.8767)} = 75.9637° = 0.4220\pi\ radianes$$

Quedando las coordenadas esféricas así:

$$N(\sqrt{21}, 0.4220\pi, 0.6438\pi)$$ ✓

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Para encontrar las coordenadas esféricas de P (-6, 2, 7):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{89}$$

$$\varphi = arc\cos\frac{z}{r}$$

$$\varphi = arc\cos\frac{7}{\sqrt{89}} = 42.0981° = 0.2339\pi\ radianes$$

$$\theta = \text{arc cos}\frac{x}{r(sen\varphi)}$$

$$\theta = arc\ cos\frac{-6}{\sqrt{89}(sen\ 42.0981)} = 161.5649° = 0.8976\pi\ radianes$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Quedando las coordenadas esféricas así:

$$P(\sqrt{89}, 0.8976\pi, 0.2339\pi)$$ ✓

- Convierte las *coordenadas esféricas* siguientes, a *coordenadas cartesianas* Q (5, π/2, π), R (4, π/3, π/2), S (-3, 2π/3, π/4)

Para el punto Q (5, π/2, π) [recordemos que se expresa en coordenadas esféricas como (r, θ, φ)] encontraremos (x, y z) mediante:

$$z = r\ cos\varphi$$

$$x = r\ (sen\varphi)\ (cos\ \theta)$$

$$y = r\ (sen\varphi)\,(\operatorname{sen}\theta)$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Por tanto:

$$z = 5cos\pi = 5(\cos 180) = 5(-1) = -5$$

$$x = 5\ (sen\pi)\left(cos\frac{\pi}{2}\right) = 5(sen180)(cos90) = 5(0)(0) = 0$$

$$y = 5\ (sen\pi)\ (\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}) = 5(sen180)(sen90) = 5(0)(1) = 0$$

Entonces el punto Q queda:

$$Q(0, 0, -5)\ ✓$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

El punto R (4, π/3, π/2) se convierte a coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$z = 4cos\pi/2 = 4(\cos 90) = 4(0) = 0$$

$$x = 4\ (sen\pi/2)\left(cos\frac{\pi}{3}\right) = 4(sen90)(cos60) = 4(1)(0.5) = 2$$

$$y = 4\ (sen\pi/2)\ (\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}) = 4(sen90)(sen60) = 4(1)(0.8660) = 3.4641$$

Entonces el punto R queda:

$$R(2, 3.4641, 0)\ \checkmark$$

…coord. polares, cilíndricas y esféricas

Finalmente, el punto S (-3, 2π/3, π/4) se convierte a coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$z = -3cos\pi/4 = -3(\cos 45) = -3(0.7071) = -2.1213$$

$$x = -3\ (sen\pi/4)\left(cos\frac{2\pi}{3}\right) = -3(sen45)(cos120) = -3(0.7071)(-0.5) = 1.0607$$

$$y = -3\ (sen\pi/4)\,(\text{sen}\frac{2\pi}{3}) = -3(sen45)(sen120) = -3(0.7071)(0.8660) = -1.8371$$

Entonces el punto S queda:

$$S(1.0607, -1.8371, -2.1213)\ \checkmark$$