Clase de superficies

Ahora vamos a estudiar algunas de las superficies en el espacio más comunes y como identificarlas a partir de su ecuación.

La forma en la que vamos a identificar la superficie es mediante sus trazas, es decir, las figuras que forman en los planos coordenados, para ello analizaremos el procedimiento de cada una de las superficies.

<u>Caso 1. Elipsoide</u>

Identifique la superficie siguiente a partir de su ecuación:

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$$

Paso 1, primero vamos a sacar las trazas con alguno de los planos coordenados, en cualquier orden, para ello igualamos con cero una de las tres variables y despejamos las otras dos, una en función de la otra:

Traza en el plano yz (x=0)

$$9y^2 + z^2 = 36$$

…clase de superficies

Si en este paso no identificamos que figura es, debemos despejar una de las dos variables en función de la otra

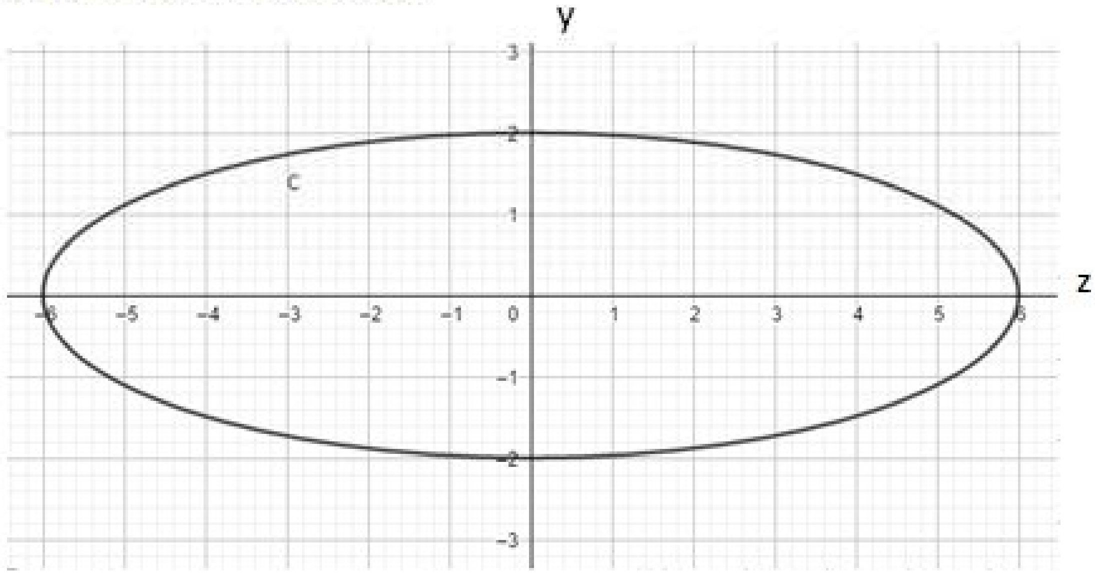
$$z = \sqrt{36 - 9y^2}$$

Ahora vamos a tabular y le daremos valores a "y" para encontrar "z", por simple inspección sabemos que podemos darle valores positivos y negativos máximo hasta ±2 y encontraremos dos resultados por cada punto en ese rango (debido a que la raíz cuadrada tiene un resultado positivo y uno negativo), pero si "y" fuera un valor mayor a ±2 tendemos números imaginarios al tener una raíz negativa

y	z
-3	imaginario
-2	0
-1	± 5.1962
0	± 6
1	± 5.1962
2	0
3	imaginario

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:



La figura tabulada es una <u>Elipse</u>

…clase de superficies

Paso 2, de la ecuación original:

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xy (z=0)

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$x = \sqrt{\frac{36 - 9y^2}{4}}$$

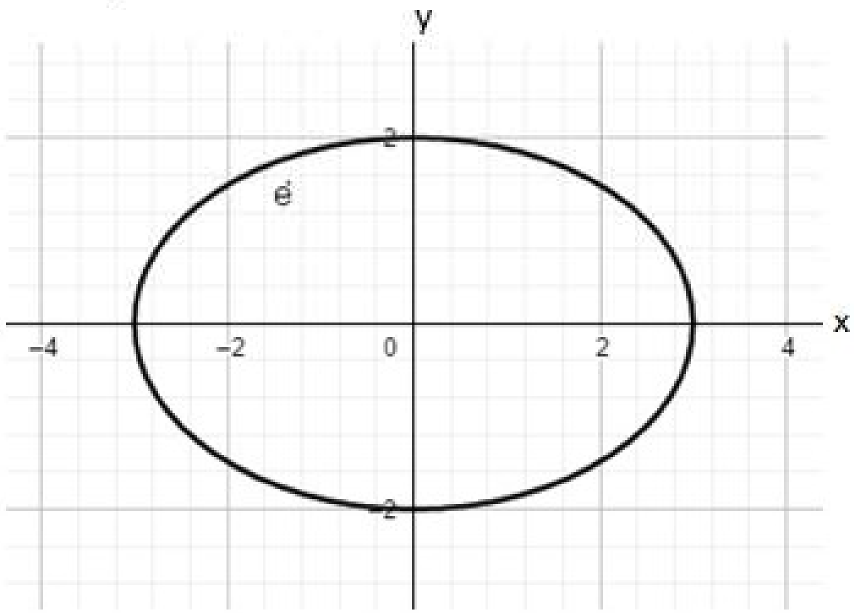
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular y le daremos valores a "y" para encontrar "x", por simple inspección sabemos que podemos darle valores positivos y negativos máximo hasta ±2 y encontraremos dos resultados por cada punto en ese rango (debido a que la raíz cuadrada tiene un resultado positivo y uno negativo), pero si "y" fuera un valor mayor a ±2 tendemos números imaginarios al tener una raíz negativa

y	x
-3	imaginario
-2	0
-1	± 2.5981
0	± 3
1	± 2.5981
2	0
3	imaginario

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:



La figura tabulada es una <u>Elipse</u>

…clase de superficies

Paso 3, de la ecuación original:

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xz (y=0)

$$4x^2 + z^2 = 36$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$x = \sqrt{\frac{36 - z^2}{4}}$$

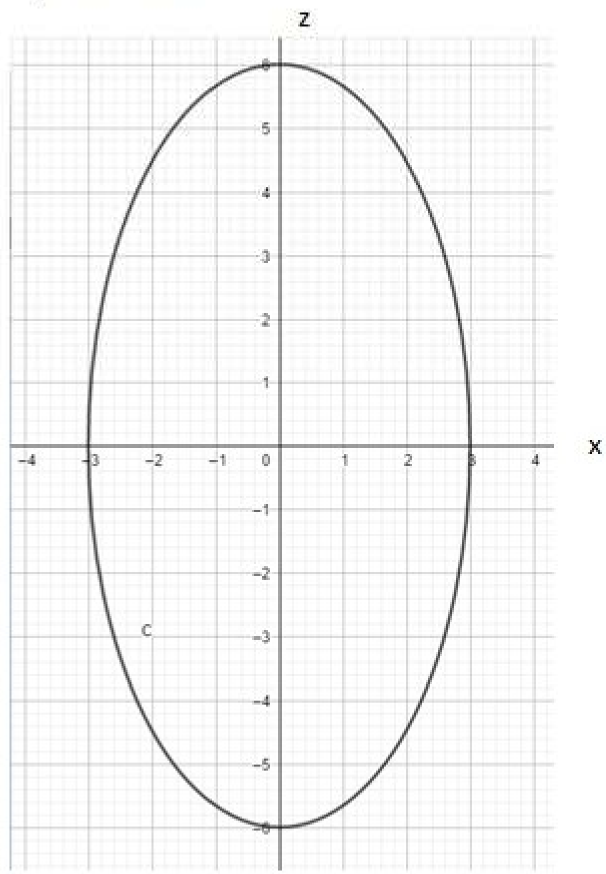
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular y le daremos valores a "z" para encontrar "x", por simple inspección sabemos que podemos darle valores positivos y negativos máximo hasta ±3 y encontraremos dos resultados por cada punto en ese rango (debido a que la raíz cuadrada tiene un resultado positivo y uno negativo), pero si "z" fuera un valor mayor a ±3 tendemos números imaginarios al tener una raíz negativa

z	x
-3	± 2.5981
-2	± 2.8284
-1	± 2.9580
0	± 3
1	± 2.9580
2	± 2.8284
3	± 2.5981

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:

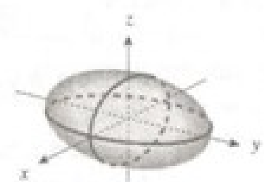


La figura tabulada es una Elipse

…clase de superficies

Recordemos entonces que la traza con el plano yz es una <u>Elipse</u>, la traza con el plano xy es una <u>Elipse</u> y la traza con el plano xz es una <u>Elipse</u>

Paso 4, debemos consultar la "Tabla de superficies" y veremos a que figura se parece, es decir podemos ver que la figura que se encuentra en la fila dos en la segunda columna tiene como trazas con los planos coordenados tres elipses, como nuestra figura (no importa en qué orden están)

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	plano xy: Elipse $z=\lvert k\rvert<c$: Elipse plano yz: Elipse $x=\lvert k\rvert<c$: Elipse plano xz: Elipse $y=\lvert k\rvert<c$: Elipse		

Tres elipses

En este caso el eje de la figura es el eje "y"

…clase de superficies

Si observamos la ecuación original tiene la forma de la ecuación de la columna uno:

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$$

Si dividimos todo entre 36, para hacer que el término independiente sea la unidad, tendremos:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} + \frac{z^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$$

Entonces nuestra ecuación representa un **Elipsoide**

…clase de superficies

Caso 2. Hiperboloide elíptico de una hoja

Identifique la superficie siguiente a partir de su ecuación:

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 100$$

Paso 1, primero vamos a sacar las trazas con alguno de los planos coordenados, en cualquier orden, para ello igualamos con cero una de las tres variablesy despejamos las otras dos, una en función de la otra:

Traza en el plano yz (x=0)

$$-y^2 + 25z^2 = 100$$

…clase de superficies

Si en este paso no identificamos que figura es, debemos despejar una de las dos variables en función de la otra

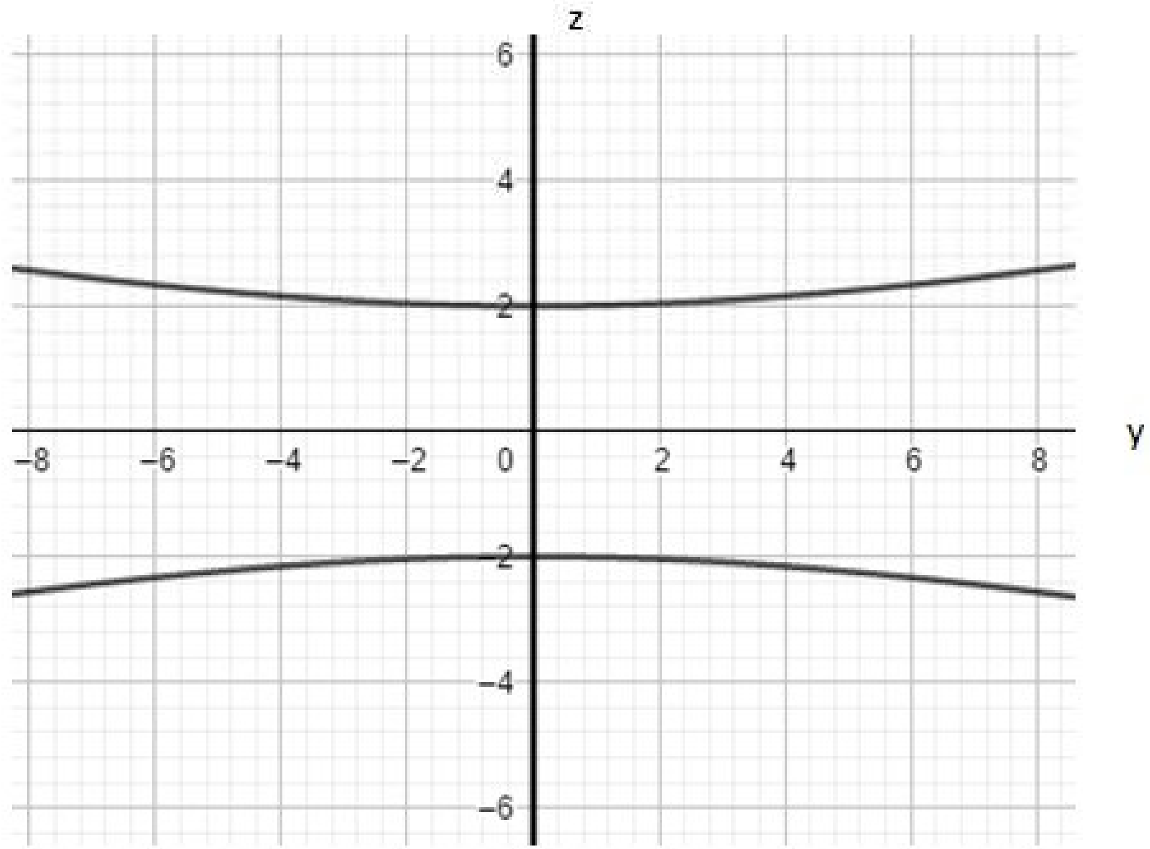
$$z = \sqrt{\frac{100 + y^2}{25}}$$

Ahora vamos a tabular y le daremos valores a “y” para encontrar “z”, por simple inspección sabemos que podemos darle valores positivos y negativos y encontraremos dos resultados por cada punto (debido a que la raíz cuadrada tiene un resultado positivo y uno negativo)

y	z
-3	± 2.08806
-2	± 2.03961
-1	± 2.00998
0	± 2.
1	± 2.00998
2	± 2.0396
3	± 2.0881

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:



La figura tabulada es una <u>Hipérbola</u>

…clase de superficies

Paso 2, de la ecuación original:

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 100$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xy (z=0)

$$4x^2 - y^2 = 100$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$x = \sqrt{\frac{100 + y^2}{4}}$$

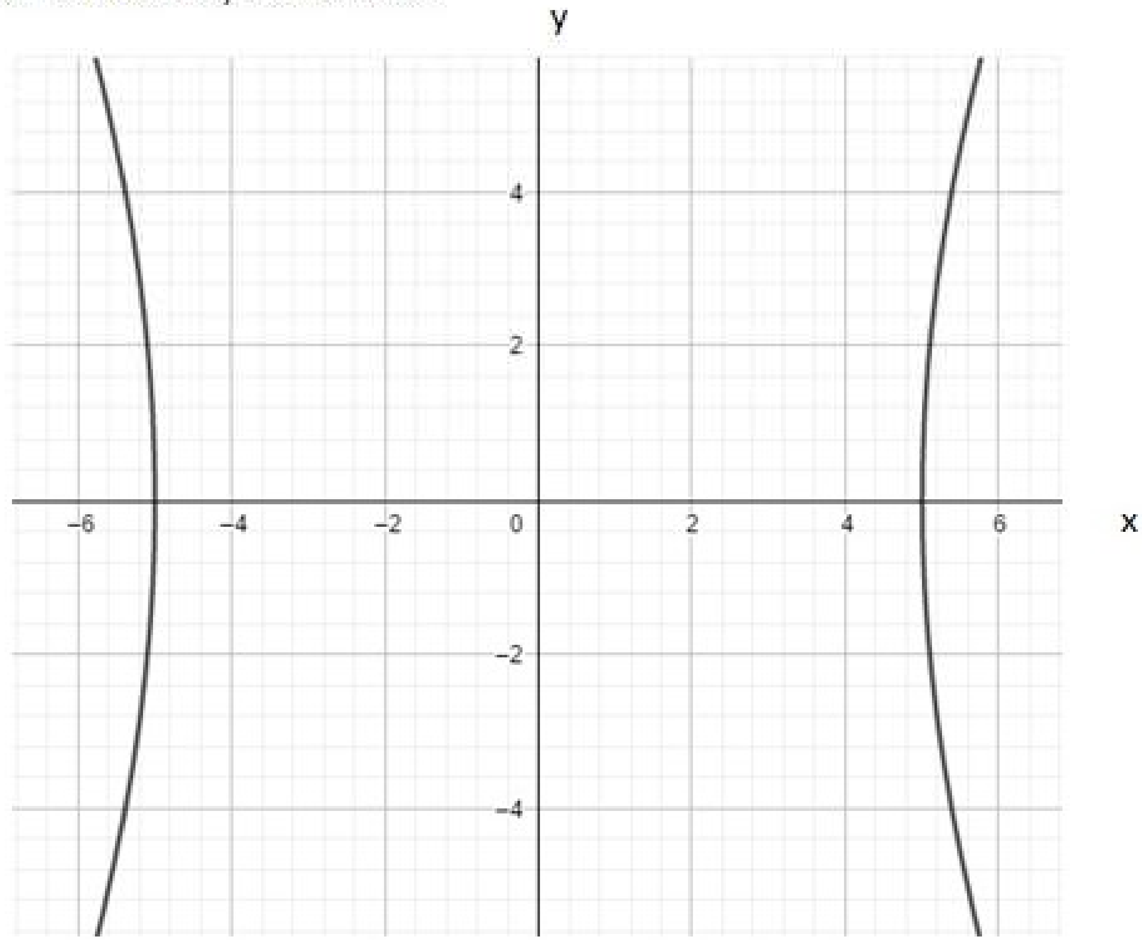
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular y le daremos valores a "y" para encontrar "x", por simple inspección sabemos que podemos darle valores positivos y negativos y encontraremos dos resultados por cada punto (debido a que la raíz cuadrada tiene un resultado positivo y uno negativo)

y	x
-3	± 5.2202
-2	± 5.0990
-1	± 5.0249
0	± 5
1	± 5.0249
2	± 5.0990
3	± 5.2202

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:



La figura tabulada es una <u>Hipérbola</u>

…clase de superficies

Paso 3, de la ecuación original:

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 100$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xz (y=0)

$$4x^2 + 25z^2 = 100$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$x = \sqrt{\frac{100 - 25z^2}{4}}$$

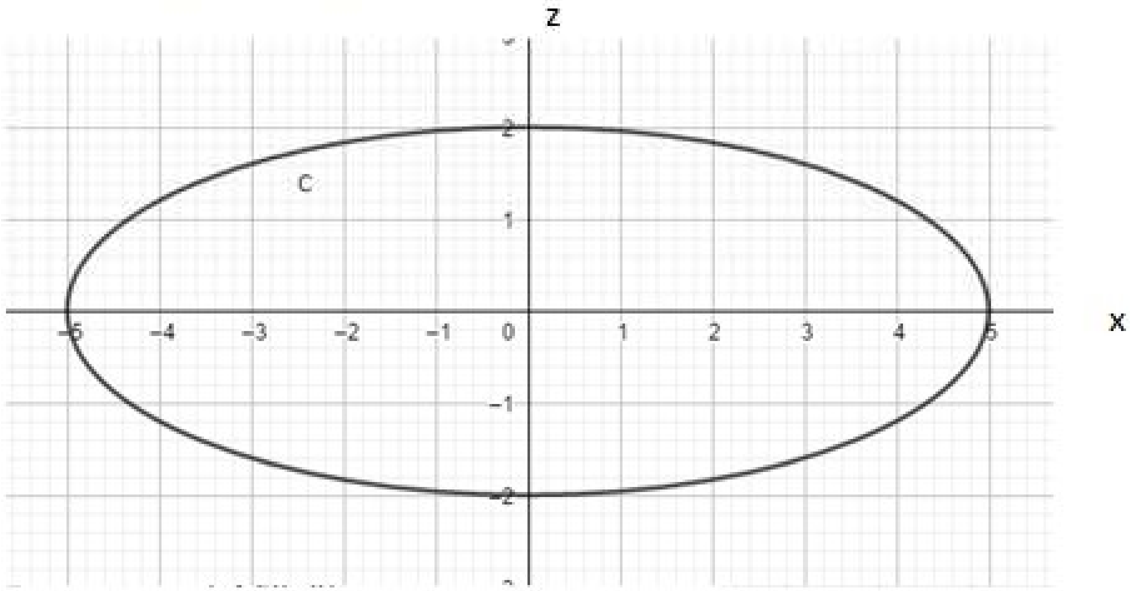
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular y le daremos valores a “z” para encontrar “x”, por simple inspección sabemos que el máximo valor que puedo darle a z es ±2 ya que valores mayores a dos me dará una raíz cuadrada negativa, es decir, un número imaginario.

z	x
-3	imaginario
-2	0
-1	± -4.3301
0	± -5
1	± -4.3301
2	0
3	imaginario

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:

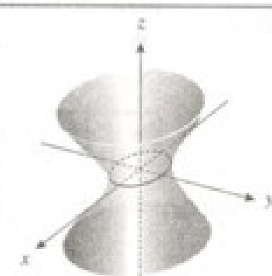


La figura tabulada es una <u>Elipse</u>

…clase de superficies

Recordemos entonces que la traza con el plano yz es una <u>Hipérbola</u>, la traza con el plano xy es una <u>Hipérbola</u> y la traza con el plano xz es una <u>Elipse</u>

Paso 4, debemos consultar la "Tabla de superficies" y veremos a que figura se parece, es decir podemos ver que la figura que se encuentra en la fila dos en la segunda columna tiene como trazas con los planos coordenados una Elipse y dos Hipérbolas, como nuestra figura (no importa en qué orden están)

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Hiperboloide elíptico de una hoja $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	plano xy: Elipse $z=k$: Elipse plano yz: Hipérbola $x=k$: Hipérbola plano xz: Hipérbola $y=k$: Hipérbola		

Dos Hipérbolas y una elipse

En este caso el eje de la figura es el eje "z"

…clase de superficies

Si observamos la ecuación original tiene la forma de la ecuación de la columna uno:

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 100$$

Si dividimos todo entre 100, para hacer que el término independiente sea la unidad, tendremos:

$$\frac{4x^2}{100} - \frac{y^2}{100} + \frac{25z^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Entonces nuestra ecuación representa un **Hiperboloide elíptico de una hoja**

Y para identificar cuál es el eje alrededor del que la figura gira, debemos observar que en la "Tabla de superficies" la figura tiene como eje el eje "z", y en el plano "xy" es donde nos da una figura diferente (dos hipérbolas, son las figuras iguales, la figura diferente es la elipse)

Para nuestro ejemplo, en el plano "xz" que es cuando y=0, es donde tenemos una figura diferente, es donde se traza la Elipse, es entonces que el eje de la figura analizada se encuentra en el eje "y". La figura es un **Hiperboloide elíptico de una hoja con eje en "y"**

…clase de superficies

Caso 3. Hiperboloide elíptico de dos hojas

Identifique la superficie siguiente a partir de su ecuación:

$$4x^2 - 25y^2 - z^2 = 100$$

Paso 1, primero vamos a sacar las trazas con alguno de los planos coordenados, en cualquier orden, para ello igualamos con cero una de las tres variables y despejamos las otras dos, una en función de la otra:

Traza en el plano yz (x=0)

$$-25y^2 - z^2 = 100$$

Si en este paso no identificamos que figura es, debemos despejar una de las dos variables en función de la otra

$$z = \sqrt{\frac{100 + 25y^2}{-1}}$$

…clase de superficies

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a "y" para encontrar "z", por simple inspección sabemos que cualquier valor que le demos a "y" nos dará un número imaginario para "z", al ser el denominador negativo y estar la "y" elevada al cuadrado.

y	z
-3	imaginario
-2	imaginario
-1	imaginario
0	imaginario
1	imaginario
2	imaginario
3	imaginario

En este caso no tenemos figura en el plano "yz"

…clase de superficies

Paso 2, de la ecuación original:

$$4x^2 - 25y^2 - z^2 = 100$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xy (z=0)

$$4x^2 - 25y^2 = 100$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$x = \sqrt{\frac{100 + 25y^2}{4}}$$

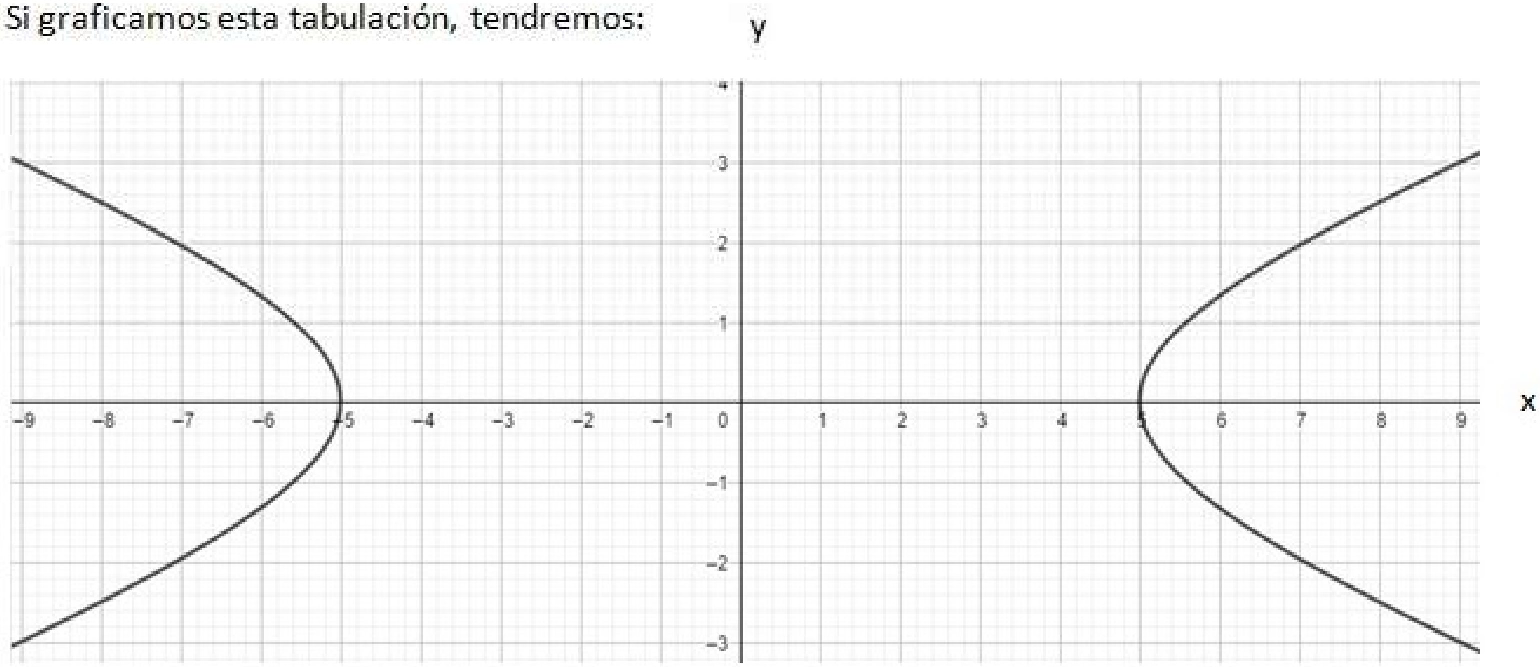
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a "y" para encontrar "x", por simple inspección sabemos que podemos darle valores positivos y negativos y encontraremos dos resultados por cada punto (debido a que la raíz cuadrada tiene un resultado positivo y uno negativo)

y	x
-3	± 9.0139
-2	± 7.0711
-1	± 5.5902
0	± 5
1	± 5.5902
2	± 7.0711
3	± 9.0139

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:



La figura tabulada es una Hipérbola

…clase de superficies

Paso 3, de la ecuación original:

$$4x^2 - 25y^2 - z^2 = 100$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xz (y=0)

$$4x^2 - z^2 = 100$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$x = \sqrt{\frac{100 + z^2}{4}}$$

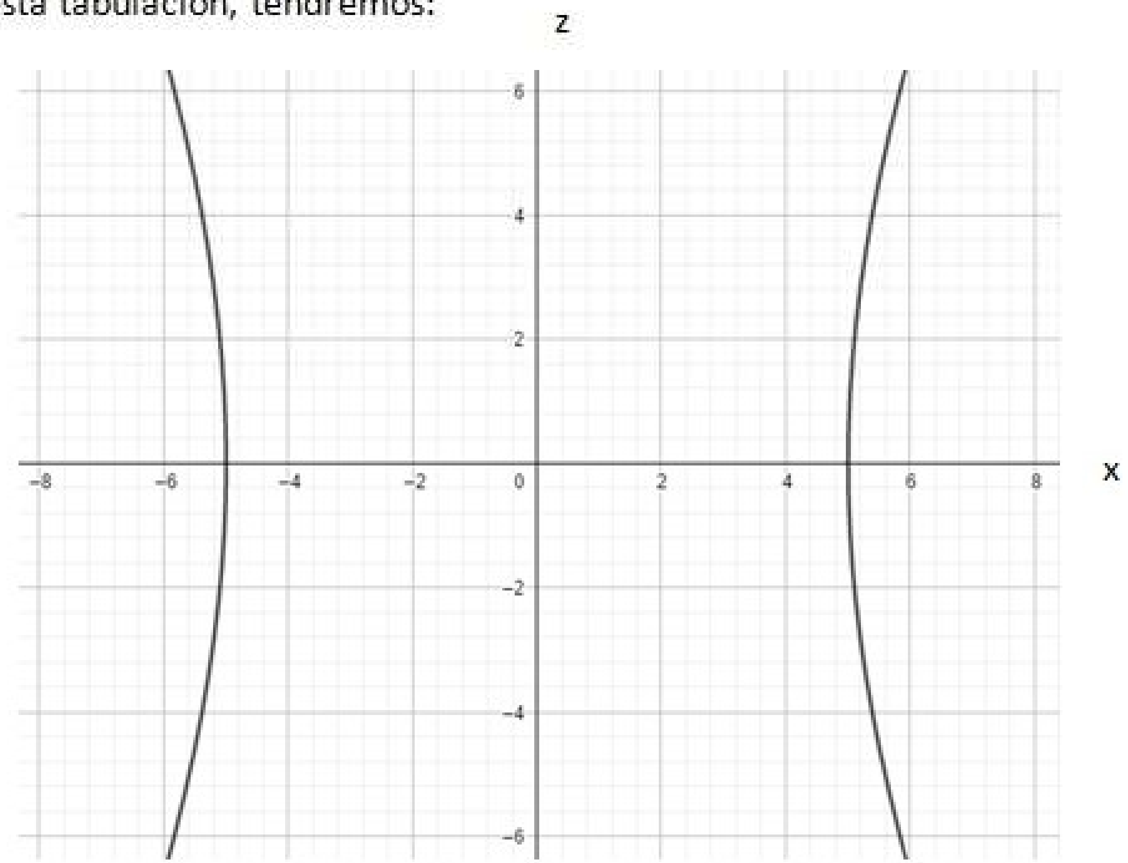
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a "z" para encontrar "x", por simple inspección sabemos que podemos darle valores positivos y negativos y encontraremos dos resultados por cada punto (debido a que la raíz cuadrada tiene un resultado positivo y uno negativo).

z	x
-3	± 5.2202
-2	± 5.0990
-1	± 5.0249
0	± 5
1	± 5.0249
2	± 5.0990
3	± 5.2202

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:

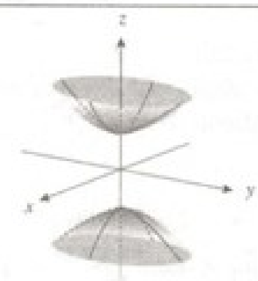
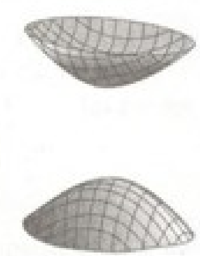


La figura tabulada es una <u>Hipérbola</u>

…clase de superficies

Recordemos entonces que con el plano yz <u>no tenemos ninguna figura</u>, la traza con el plano xy es una <u>Hipérbola</u> y la traza con el plano xz es otra <u>Hipérbola</u>

Paso 4, debemos consultar la "Tabla de superficies" y veremos a que figura se parece, es decir podemos ver que la figura que se encuentra en la fila tres en la segunda columna nos aparecen que las trazas con los planos coordenados son también ninguna figura y dos Hipérbolas (no importa en qué orden están)

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Hiperboloide elíptico de dos hojas $$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$	plano xy: Ninguna $z = \|k\| < c$: Ninguna $z = \|k\| > c$: Elipse plano yz: Hipérbola $x = k$: Hipérbola plano xz: Hipérbola $y = k$: Hipérbola		

Dos Hipérbolas y ninguna figura

En este caso el eje de la figura es el eje "z"

…clase de superficies

Si observamos la ecuación original tiene la forma de la ecuación de la columna uno:

$$4x^2 - 25y^2 - z^2 = 100$$

Si dividimos todo entre 100, para hacer que el término independiente sea la unidad, tendremos:

$$\frac{4x^2}{100} - \frac{25y^2}{100} - \frac{z^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{100} = 1$$

Entonces nuestra ecuación representa un **Hiperboloide elíptico de dos hojas**

Y para identificar cuál es el eje alrededor del que la figura gira, debemos observar que en la "Tabla de superficies" la figura tiene como eje el eje "z", y en el plano "xy" es donde nos da una figura diferente (dos hipérbolas, son las figuras iguales, y ninguna figura es lo diferente)

Para nuestro ejemplo, en el plano "yz" que es cuando x=0, es donde tenemos algo diferente (no tenemos una figura), es entonces que el eje de la figura analizada se encuentra en el eje "x". La figura es un **Hiperboloide elíptico de dos hojas con eje en "x"**

…clase de superficies

Caso 4. Paraboloide elíptico

Identifique la superficie siguiente a partir de su ecuación:

$$3y^2 + 12z^2 = 16x$$

Paso 1, primero vamos a sacar las trazas con alguno de los planos coordenados, en cualquier orden, para ello igualamos con cero una de las tres variables y despejamos las otras dos, una en función de la otra:

Traza en el plano yz (x=0)

$$3y^2 + 12z^2 = 0$$

Si en este paso no identificamos que figura es, debemos despejar una de las dos variables en función de la otra

$$z = \sqrt{\frac{-3y^2}{12}}$$

…clase de superficies

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a "y" para encontrar "z", por simple inspección sabemos que cualquier valor que le demos a "y" (excepto cero) nos dará un número imaginario para "z", al estar multiplicado por -3 y estar la "y" elevada al cuadrado.

y	z
-3	imaginario
-2	imaginario
-1	imaginario
0	0
1	imaginario
2	imaginario
3	imaginario

En este caso tenemos un <u>punto en el origen</u> (0,0) para el plano yz

…clase de superficies

Paso 2, de la ecuación original:

$$3y^2 + 12z^2 = 16x$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xy (z=0)

$$3y^2 = 16x$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$y = \sqrt{\frac{16x}{3}}$$

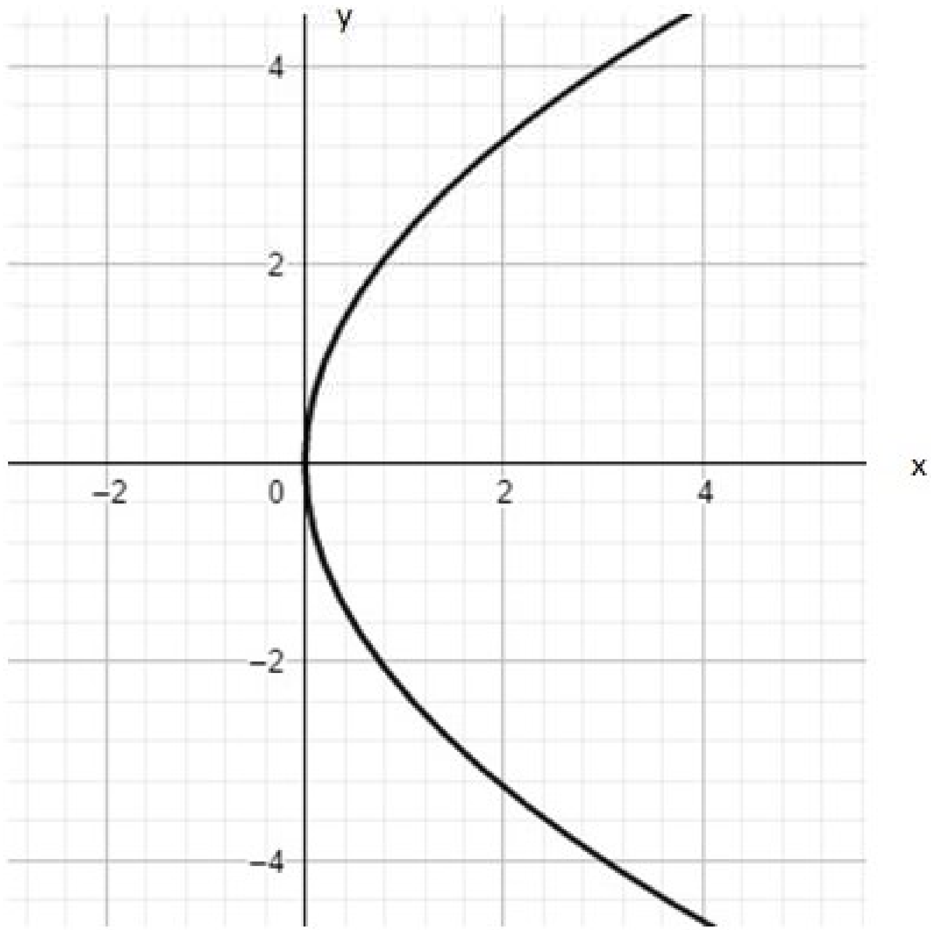
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a "x" para encontrar "y", por simple inspección sabemos que solo podemos darle valores positivos y encontraremos dos resultados por cada punto (los valores negativos que le demos, nos darán una raíz negativa, es decir, un número imaginario)

x	y
-3	imaginario
-2	imaginario
-1	imaginario
0	0
1	± 2.3094
2	± 3.2660
3	± 4

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:



La figura tabulada es una Parábola

…clase de superficies

Paso 3, de la ecuación original:

$$3y^2 + 12z^2 = 16x$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xz (y=0)

$$12z^2 = 16x$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$z = \sqrt{\frac{16x}{12}}$$

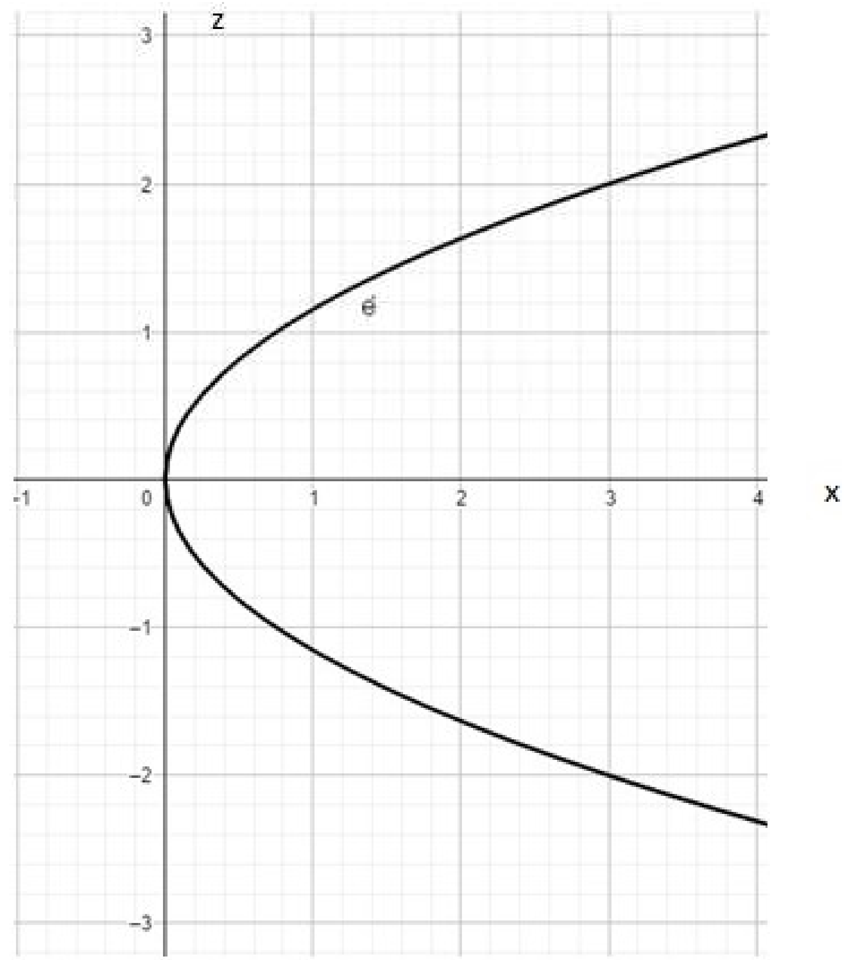
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a "x" para encontrar "z", por simple inspección sabemos que solo podemos darle valores positivos y encontraremos dos resultados por cada punto (los valores negativos que le demos, nos darán una raíz negativa, es decir, un número imaginario).

x	z
-3	imaginario
-2	imaginario
-1	imaginario
0	0
1	± 1.1547005
2	± 1.6329931
3	± 2

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:

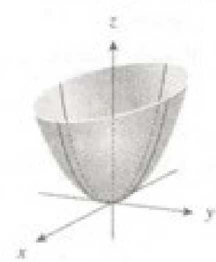


La figura tabulada es una Parábola

…clase de superficies

Recordemos entonces que con el plano yz tenemos un punto en el origen, la traza con el plano xy es una Parábola y la traza con el plano xz es otra Parábola

Paso 4, debemos consultar la "Tabla de superficies" y veremos a que figura se parece, es decir podemos ver que la figura que se encuentra en la fila cuatro en la segunda columna nos aparecen que las trazas con los planos coordenados son también un punto en el origen y dos Parábolas (no importa en qué orden están)

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*		*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ $c>0$	plano xy: $z=k>0$: $z=k<0$: plano yz: $x=k$: plano xz: $y=k$:	Punto (origen) Elipse Ninguno Parábola Parábola Parábola Parábola		

Dos Parábolas y un punto en el origen

En este caso el eje de la figura es el eje "z"

…clase de superficies

Si observamos la ecuación original tiene la forma de la ecuación de la columna uno:

$$3y^2 + 12z^2 = 16x$$

Si sacamos término común y pasamos al denominador del otro término (cruzado), para tratar de dejar a "x", "y" y "z" sin coeficientes, tendremos:

$$3(y^2 + 4z^2) = 16x$$

$$\frac{(y^2 + 4z^2)}{16} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{y^2}{16} + \frac{4z^2}{16} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

Entonces nuestra ecuación representa un **Paraboloide elíptico**

…clase de superficies

Y para identificar cuál es el eje alrededor del que la figura gira, debemos observar que en la "Tabla de superficies" la figura tiene como eje el eje "z", y en el plano "xy" es donde nos da una figura diferente (dos parábolas, son las figuras iguales, y un punto en el origen es lo diferente)

Para nuestro ejemplo, en el plano "yz" que es cuando x=0, es donde tenemos algo diferente (punto en el origen), es entonces que el eje de la figura analizada se encuentra en el eje "x". La figura es un **Paraboloide elíptico con eje en "x"**

…clase de superficies

Caso 5. Paraboloide hiperbólico

Identifique la superficie siguiente a partir de su ecuación:

$$3y^2 - 12z^2 = 16x$$

Paso 1, primero vamos a sacar las trazas con alguno de los planos coordenados, en cualquier orden, para ello igualamos con cero una de las tres variables y despejamos las otras dos, una en función de la otra:

Traza en el plano yz (x=0)

$$3y^2 - 12z^2 = 0$$

…clase de superficies

Si en este paso no identificamos que figura es, debemos despejar una de las dos variables en función de la otra

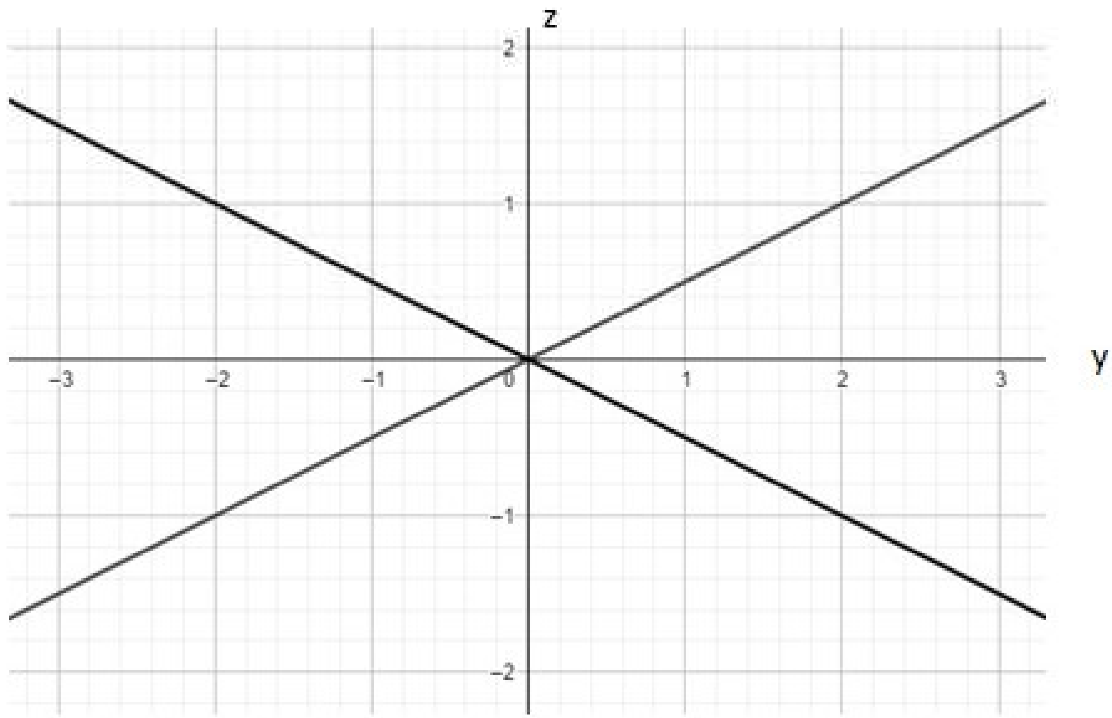
$$z = \sqrt{\frac{-3y^2}{-12}}$$

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a "y" para encontrar "z", por simple inspección sabemos que podemos darle valores positivos y negativos y encontraremos dos resultados por cada punto (debido a que la raíz cuadrada tiene un resultado positivo y uno negativo)

y	z
-3	± 1.5
-2	± 1
-1	± 0.5
0	0
1	± 0.5
2	± 1
3	± 1.5

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:



En este caso tenemos <u>dos rectas</u> para el plano yz

…clase de superficies

Paso 2, de la ecuación original:

$$3y^2 - 12z^2 = 16x$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xy (z=0)

$$3y^2 = 16x$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$y = \sqrt{\frac{16x}{3}}$$

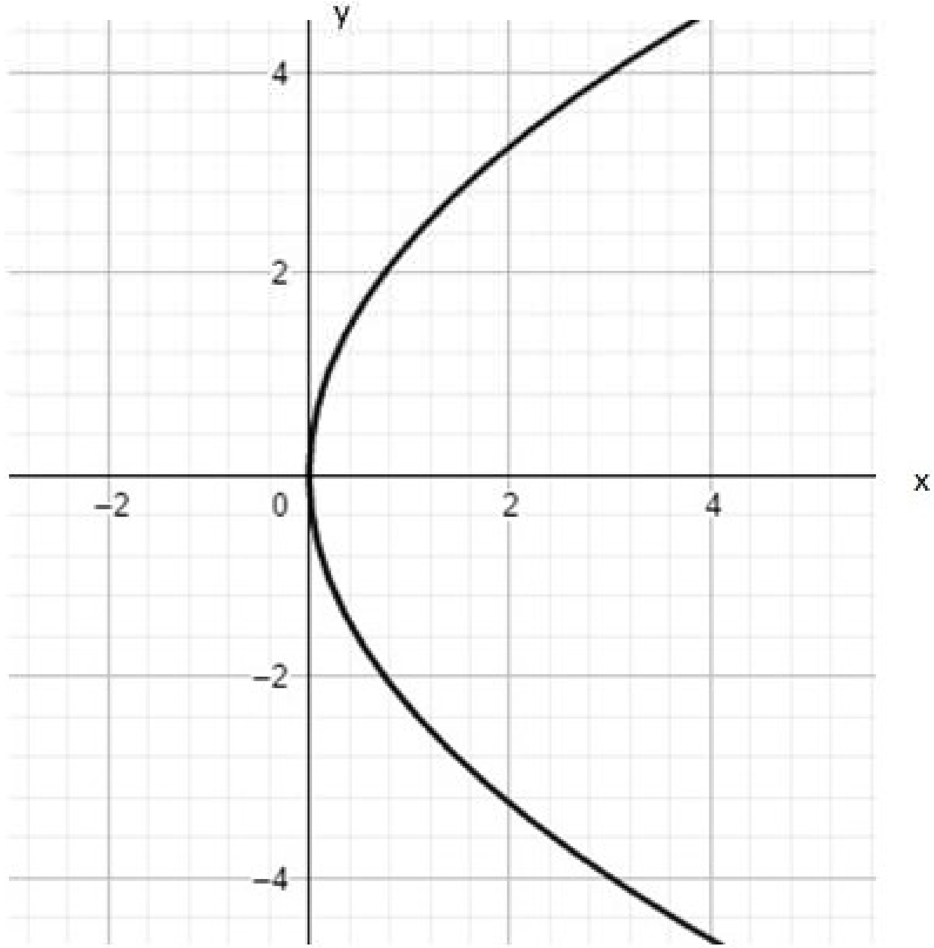
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a “x” para encontrar “y”, por simple inspección sabemos que solo podemos darle valores positivos y encontraremos dos resultados por cada punto (los valores negativos que le demos, nos darán una raíz negativa, es decir, un número imaginario)

x	y
-3	imaginario
-2	imaginario
-1	imaginario
0	0
1	± 2.3094
2	± 3.2660
3	± 4

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:



La figura tabulada es una Parábola

…clase de superficies

Paso 3, de la ecuación original:

$$3y^2 - 12z^2 = 16x$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xz (y=0)

$$-12z^2 = 16x$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$z = \sqrt{\frac{16x}{-12}}$$

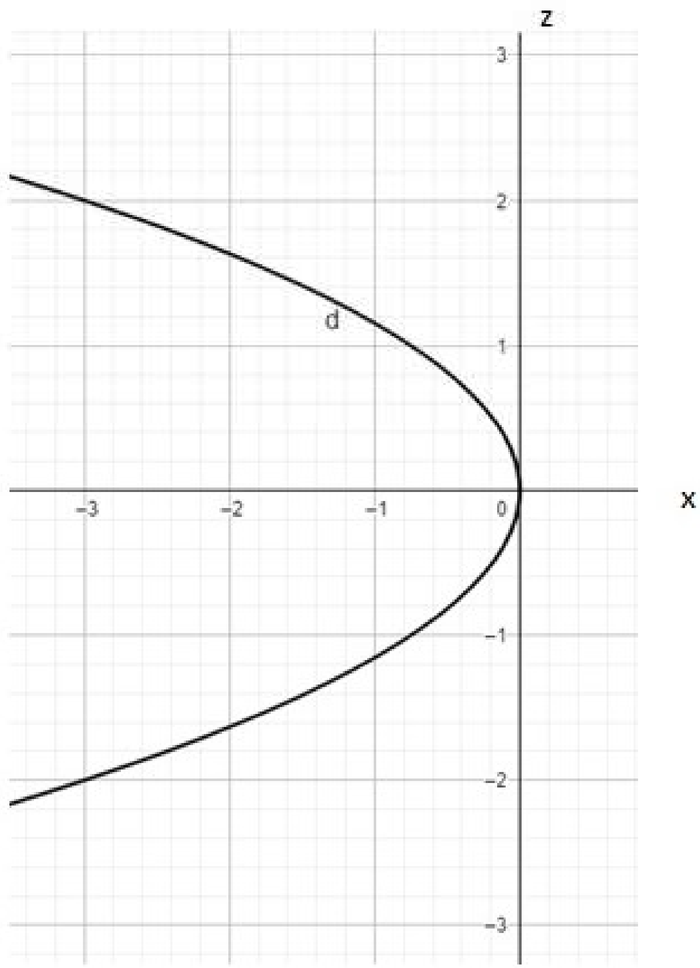
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a “x” para encontrar “z”, por simple inspección sabemos que solo podemos darle valores negativos a “x” para hacer al tener un número negativo en el numerador, y otro negativo en el denominador se obtenga una raíz positiva y no un número imaginario.

x	z
-3	± 2
-2	± 1.6330
-1	± 1.1547
0	0
1	imaginario
2	imaginario
3	imaginario

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:



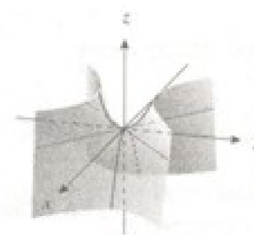
La figura tabulada es una <u>Parábola</u>

Mtra. Ma. De los Ángeles Martínez Cosío

…clase de superficies

Recordemos entonces que con el plano yz tenemos dos rectas, la traza con el plano xy es una Parábola y la traza con el plano xz es otra Parábola

Paso 4, debemos consultar la "Tabla de superficies" y veremos a que figura se parece, es decir podemos ver que la figura que se encuentra en la fila cinco en la segunda columna nos aparecen que las trazas con los planos coordenados son también un punto en el origen y dos Parábolas (no importa en qué orden están)

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Paraboloide hiperbólico $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ $c > 0$	plano xy: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $z = k \neq 0$: Hipérbola plano yz: Parábola $x = k$: Parábola plano xz: Parábola $y = k$: Parábola		

Dos Parábolas y dos rectas

En este caso el eje de la figura es el eje "z"

…clase de superficies

Si observamos la ecuación original tiene la forma de la ecuación de la columna uno:

$$3y^2 - 12z^2 = 16x$$

Si sacamos término común y pasamos al denominador del otro término (cruzado), para tratar de dejar a "x", "y" y "z" sin coeficientes, tendremos:

$$3(y^2 - 4z^2) = 16x$$

$$\frac{(y^2 - 4z^2)}{16} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{4z^2}{16} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

Entonces nuestra ecuación representa un **Paraboloide hiperbólico**

Y para identificar cuál es el eje alrededor del que la figura gira, debemos observar que en la "Tabla de superficies" la figura tiene como eje el eje "z", y en el plano "xy" es donde nos da una figura diferente (dos parábolas, son las figuras iguales, y dos rectas que es lo diferente)

Para nuestro ejemplo, en el plano "yz" que es cuando x=0, es donde tenemos algo diferente (dos rectas), es entonces que el eje de la figura analizada se encuentra en el eje "x". La figura es un **Paraboloide hiperbólico con eje en "x"**

…clase de superficies

Caso 6. Cono elíptico

Identifique la superficie siguiente a partir de su ecuación:

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 0$$

Paso 1, primero vamos a sacar las trazas con alguno de los planos coordenados, en cualquier orden, para ello igualamos con cero una de las tres variables y despejamos las otras dos, una en función de la otra:

Traza en el plano yz (x=0)

$$-y^2 + 25z^2 = 0$$

Si en este paso no identificamos que figura es, debemos despejar una de las dos variables en función de la otra

$$y = \sqrt{25z^2}$$

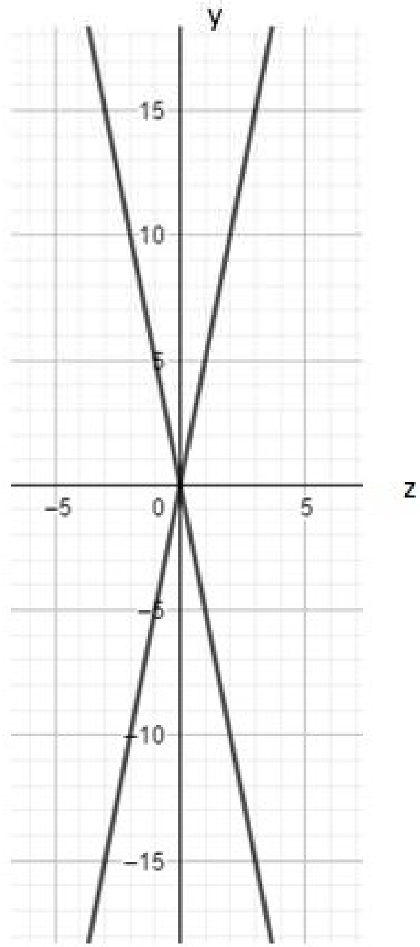
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a "z" para encontrar "y", por simple inspección sabemos que podemos darle valores positivos y negativos y encontraremos dos resultados por cada punto (debido a que la raíz cuadrada tiene un resultado positivo y uno negativo)

z	y
-3	± 15
-2	± 10
-1	± 5
0	0
1	± 5
2	± 10
3	± 15

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:



En este caso tenemos <u>dos rectas</u> para el plano yz

…clase de superficies

Paso 2, de la ecuación original:

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 0$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xy (z=0)

$$4x^2 - y^2 = 0$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$y = \sqrt{4x^2}$$

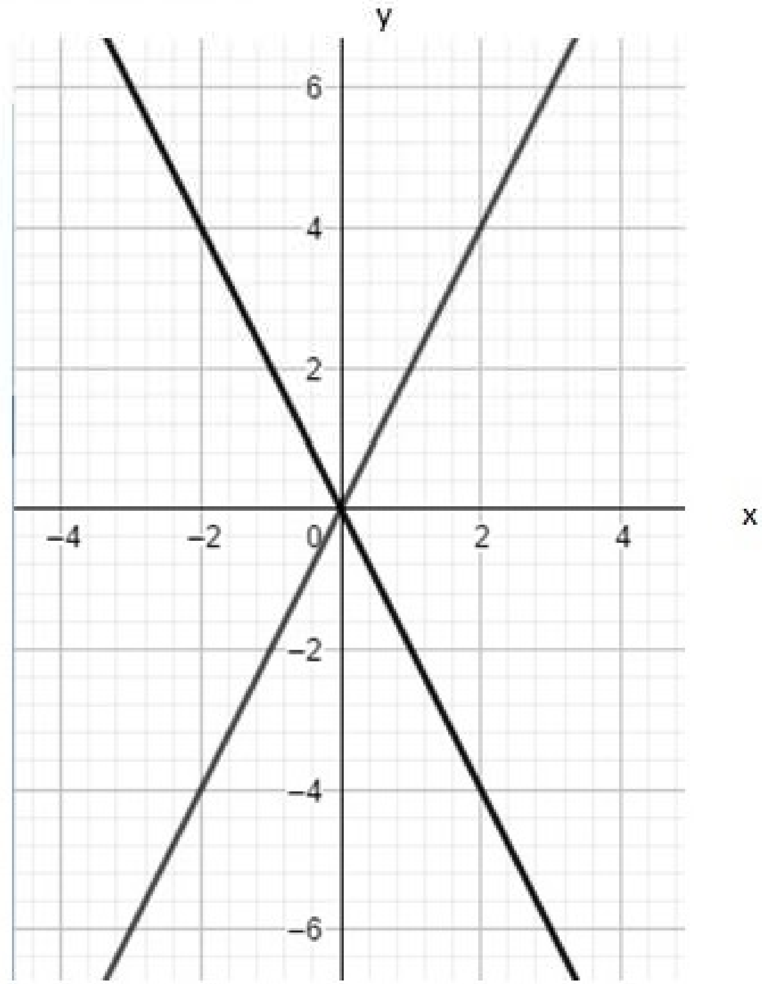
…clase de superficies

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a “x” para encontrar “y”, por simple inspección sabemos que solo podemos darle valores positivos y encontraremos dos resultados por cada punto (los valores negativos que le demos, nos darán una raíz negativa, es decir, un número imaginario)

x	y
-3	± 6
-2	± 4
-1	± 2
0	± 0
1	± 2
2	± 4
3	± 6

…clase de superficies

Si graficamos esta tabulación, tendremos:



La figura tabulada es una dos rectas en el plano xy

…clase de superficies

Paso 3, de la ecuación original:

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 0$$

Vamos ahora a obtener la traza en el plano xz (y=0)

$$4x^2 + 25z^2 = 0$$

Nuevamente, si no identificamos la figura que representa la ecuación, vamos a despejar una de las dos variables en función de la otra (la que sea más fácil):

$$z = \sqrt{\frac{-4x^2}{25}}$$

…clase de superficies

Ahora vamos a tabular, y le daremos valores a “x” para encontrar “z”, por simple inspección sabemos que cualquier valor que le demos a “x” (excepto cero) nos dará un número imaginario para “z”, al estar multiplicado por -4 y estar la “x” elevada al cuadrado.

x	z
-3	imaginario
-2	imaginario
-1	imaginario
0	0
1	imaginario
2	imaginario
3	imaginario

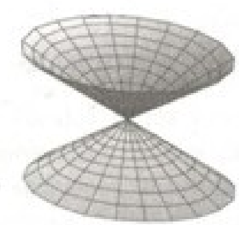
Si graficamos esta tabulación, tendremos:

La figura es un punto en el origen (0,0)

…clase de superficies

Recordemos entonces que con el plano yz tenemos <u>dos rectas</u>, la traza con el plano xy es también <u>dos rectas</u> y la traza con el plano xz es <u>un punto en el origen</u>.

Paso 4, debemos consultar la “Tabla de superficies” y veremos a que figura se parece, es decir podemos ver que la figura que se encuentra en la fila cinco en la segunda columna nos aparecen que las trazas con los planos coordenados son también un punto en el origen y dos Parábolas (no importa en qué orden están)

Superficie cuádrica	*Trazas en el plano indicado*	*Gráfica dibujada*	*Gráfica trazada por medio de Mathematica*
Cono elíptico $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$	plano xy: Punto (origen) $z=k\neq 0$: Elipse plano yz: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $x=k\neq 0$: Hipérbola plano xz: Dos rectas que se intersectan (en el origen) $y=k\neq 0$: Hipérbola		

Dos juegos de dos rectas y un punto en el origen

En este caso el eje de la figura es el eje “z”

…clase de superficies

Si observamos la ecuación original tiene la forma de la ecuación de la columna uno:

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 0$$

Si dividimos término entre 100 para aproximar la ecuación original a la ecuación de la columna uno y tratar de dejar a "x", "y" y "z" sin coeficientes, tendremos:

$$\frac{4x^2}{100} - \frac{y^2}{100} + \frac{25z^2}{100} = \frac{0}{100}$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 0$$

Entonces nuestra ecuación representa un **Cono elíptico**

Y para identificar cuál es el eje alrededor del que la figura gira, debemos observar que en la "Tabla de superficies" la figura tiene como eje el eje "z", y en el plano "xy" es donde nos da una figura diferente (dos juegos de rectas, son las figuras iguales, y el punto en el origen es lo diferente)

Para nuestro ejemplo, en el plano "xz" que es cuando y=0, es donde tenemos algo diferente (un punto en el origen), es entonces que el eje de la figura analizada se encuentra en el eje "y". La figura es un **Paraboloide hiperbólico con eje en "y"**